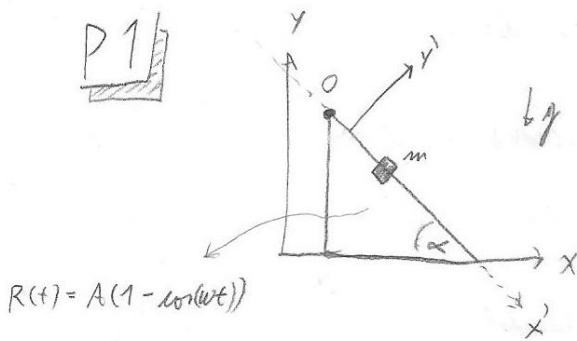
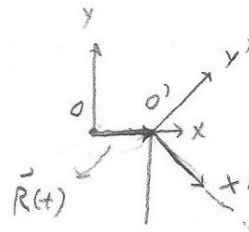


# Aux 20

P1



- Elegimos nuestro origen fijo (inercial) en el punto O. El origen de nuestro sistema no-inercial  $(x', y')$  estará "pegado" a la punta de la estructura.



- La posición del origen O' varía según  $R(t)$ :

$$\Rightarrow \vec{R}(t) = A(1 - \cos(\omega t)) \hat{x} \Rightarrow \vec{A}(t) = \vec{R}(t) = A\omega^2 \cos(\omega t) \hat{x} \quad \leftarrow \text{aceleración del sistema.}$$

- Los ejes del sistema no-inercial están fijos, no rotan  $\Rightarrow \vec{\Omega} = 0$

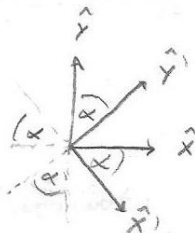
DCL

a) ec. de movimiento en  $x'$ :  $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_I$    
 ← fuerzas reales      ← fuerzas ficticias

$$\Rightarrow m\ddot{x}'\hat{x}' + m\ddot{y}'\hat{y}' = N\hat{y}' - mg\hat{y} - mA\omega^2 \cos(\omega t)\hat{x} \quad (1)$$

no hay momento en  $\hat{y}'$

• ojo:  $\hat{x} \neq \hat{x}'$  porque:



Estos en la misma fuerza ficticia

-  $m\vec{A}$ , pues  $\vec{\Omega} = 0$  luego que los demás se anulan.

$$\Rightarrow \hat{x} = \cos\alpha \hat{x}' + \sin\alpha \hat{y}', \quad \hat{y} = \cos\alpha \hat{y}' - \sin\alpha \hat{x}' \quad (2)$$

- Mundo (2) en (1)  $\Rightarrow m\ddot{x}'\hat{x}' = N\hat{y}' - mg\cos\alpha \hat{y}' + mg\sin\alpha \hat{x}' - mA\omega^2 \cos(\omega t)\cos\alpha \hat{x}' - mA\omega^2 \cos(\omega t)\sin\alpha \hat{y}'$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}' = g\sin\alpha - A\omega^2 \cos(\omega t)\cos\alpha} \quad \begin{array}{l} \text{ec. de mov en } x' \\ \text{(se divide por } m) \end{array}$$

b) ec. de mov en  $\hat{y}'$   $0 = N - \underbrace{mg \cos \alpha - mA\omega^2 \cos(\omega t) \sin \alpha}$

solo depende del tiempo!

$\Rightarrow$   $N(t) = mg \cos \alpha + mA\omega^2 \sin \alpha \cos(\omega t)$  fuerza normal en  $y'$

c) Podemos integrar (3) dos veces con la condición inicial  $x'(0) = 0$  y con el nullo partiendo desde el reposo  $\dot{x}'(0) = 0$ :

$\Rightarrow \int_0^t \frac{d\dot{x}'}{dt} dt = \int_0^{\dot{x}'} d\dot{x}' = \int_0^t (g \sin \alpha - A\omega^2 \cos \alpha \cos(\omega t)) dt$

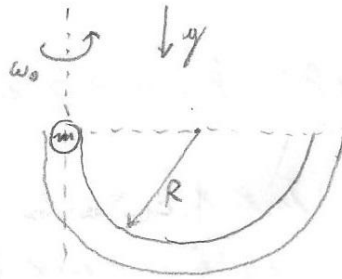
$\Rightarrow \dot{x}' - 0 = g t \sin \alpha - 0 - A\omega^2 \cos \alpha \sin(\omega t) \frac{1}{\omega} + 0$

$\Rightarrow \int_0^t \frac{d\dot{x}'}{dt} dt = \int_0^{\dot{x}'} d\dot{x}' = x' - 0 = \int_0^t (g t \sin \alpha - A\omega \cos \alpha \sin(\omega t)) dt$

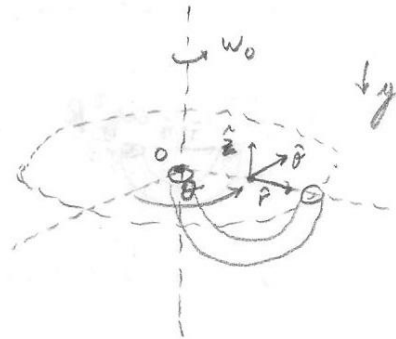
$\Rightarrow x'(t) = g \frac{t^2}{2} \sin \alpha - 0 + A \frac{\omega}{1} \cos \alpha \cos(\omega t) - A \frac{\omega}{1} \cos \alpha \cos(0)$

$\Rightarrow$   $x'(t) = \frac{g t^2}{2} \sin \alpha + A \cos \alpha (\cos(\omega t) - 1)$  posición  $x'$  en función del tiempo

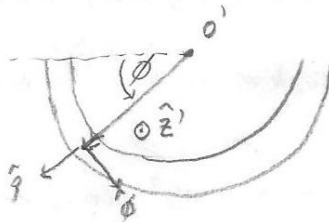
PZ



- Elegimos sistema inercial fijo con origen  $O$  y coordenadas cilíndricas  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ :



- Ponemos un sistema no-inercial también cilíndrico  $(\hat{p}, \hat{\phi}, \hat{z}')$  con origen  $O'$  en el centro del semi-círculo:



- La relación entre los vectores unitarios es:

$$\left. \begin{aligned} \hat{z}' &= -\hat{z} \\ \hat{r} &= -\cos\phi \hat{p} + \sin\phi \hat{\phi} \\ \hat{z} &= -\sin\phi \hat{p} - \cos\phi \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- La aceleración del origen del sistema es:

$$\vec{R} = R\hat{r} \Rightarrow \vec{A} = -R\omega_0^2 \hat{r} \quad (2)$$

de  $\omega_0 = \dot{\theta}$

- Los ejes  $(\hat{p}, \hat{\phi}, \hat{z})$  como son cilíndricos tienen un giro "normal" en  $\hat{p}, \hat{\phi}$  dado por el ángulo  $\phi$ . Pero además están teniendo un giro adicional en un eje dado que en este caso está rotando en  $\theta$ .

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \omega_0 \hat{z} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

- a) ec. de movimiento en el sistema no-inercial:

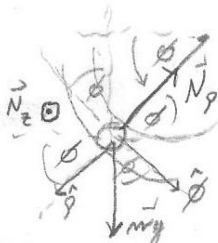
$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \quad (4)$$

- La posición, velocidad y aceleración en el SNI son:

$$\vec{r}' = R\hat{p} \Rightarrow \vec{v}' = R\dot{\phi}\hat{\phi} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = -R\ddot{\phi}\hat{p} + R\dot{\phi}^2\hat{\phi}$$

DCL:



$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{mg} &= mg(\sin\phi \hat{p} + \cos\phi \hat{\phi}) \\ \vec{F}_N &= -N_p \hat{p} + N_z \hat{z}' \end{aligned} \right\} = \vec{F} \quad (6)$$

• Usando (1), (2), (3) y (5) calculamos los productos cruzados:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{r}' &= \omega_0 \hat{z} \times R \hat{p} = -\omega_0 R (\sin \phi \hat{p} + \cos \phi \hat{\phi}) \times \hat{p} = \omega_0 R \hat{z}' \cos \phi \\ \Rightarrow \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= -\omega_0^2 R (\sin \phi \hat{p} + \cos \phi \hat{\phi}) \cos \phi \times \hat{z}' \\ &= \omega_0^2 R \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} - \omega_0^2 R \cos^2 \phi \hat{p} \\ \vec{\Omega} \times \vec{r}' &= -\omega_0 (\sin \phi \hat{p} + \cos \phi \hat{\phi}) \times (R \dot{\phi} \hat{\phi}) = -\omega_0 R \dot{\phi} \sin \phi \hat{z}' \end{aligned} \right\} (7)$$

• Usando (5), (6) y (7) en (4):

$$\begin{aligned} \Rightarrow -mR\dot{\phi}^2 \hat{p} + mR\ddot{\phi} \hat{\phi} &= m g \sin \phi \hat{p} + m g \cos \phi \hat{\phi} - N_p \hat{p} - mR\omega_0^2 \cos \phi \hat{p} + mR\omega_0^2 \sin \phi \hat{\phi} \\ &\quad - mR\omega_0^2 \cos \phi \sin \phi \hat{\phi} + m\omega_0^2 R \cos^2 \phi \hat{p} + 2\omega_0 R \dot{\phi} \sin \phi \hat{z}' + N_z \hat{z}' \quad (8) \end{aligned}$$

$$(8) \cdot \hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi}} \quad mR\ddot{\phi} = m g \cos \phi + mR\omega_0^2 \sin \phi - mR\omega_0^2 \sin \phi \cos \phi$$

$$\frac{1}{mR} \cdot ( ) \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{g}{R} \cos \phi + \omega_0^2 \sin \phi - \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi \quad \leftarrow \text{integrar con } \dot{\phi} = \phi \frac{d\phi}{d\phi}, \phi(0)=0 \text{ y velocidad derivada respecto } \dot{\phi}(0)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\phi} \dot{\phi} d\phi = \int_0^{\phi} \left( \frac{g}{R} \cos \phi + \omega_0^2 \sin \phi - \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi \right) d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} - 0 = \frac{g}{R} \sin \phi - 0 + \omega_0^2 \cos \phi - \omega_0^2 - \omega_0^2 \sin^2 \phi \frac{1}{2} + 0$$

• Evoluimos en  $\phi = \pi$  que es cuando se partiendo solo del tubo:

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2(\pi)}{2} = 0 + 2\omega_0^2 + 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_\pi = 2\omega_0} \quad (9)$$

• La velocidad absoluta está dada por:  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\omega_0 \hat{\theta} + R\dot{\phi} \hat{\phi} + \omega_0 R \cos\phi \hat{z}' \quad \text{y evaluando en } \pi = \phi$$

$\hat{z}'$  (9)

$$\Rightarrow \vec{v}(\pi) = -R\omega_0 \hat{z}' + R\dot{\phi}_\pi \hat{\phi} + \omega_0 R \cos\pi \hat{z}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(\pi) = 2R\omega_0 (\dot{\phi} - \hat{z}')} \quad \text{velocidad absoluta al salir del tubo. visto desde el SNT:}$$

$$\text{y con } \hat{z}' = -\hat{\theta} \quad \text{y} \quad \hat{\phi} = \sin\phi \hat{r} - \cos\phi \hat{z} \xrightarrow{\phi=\pi} \hat{\phi}_\pi = \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(\pi) = 2R\omega_0 (\hat{z} + \hat{\theta})} \quad \text{velocidad al salir del tubo visto desde el SI.}$$

$$b) (8) \cdot \hat{z}' \Rightarrow 0 = N_z + 2\omega_0 R \dot{\phi} \sin\phi \quad \text{evaluando en } \pi:$$

$$\Rightarrow 0 = N_z + 0 \Rightarrow \boxed{N_z = 0}$$

$$(8) \cdot \hat{\rho} \Rightarrow -mR\dot{\phi}^2 = m g \sin\phi - N_\rho - mR\omega_0^2 \cos\phi + m\omega_0^2 R \cos^2\phi$$

• evaluando en  $\pi$ :

$$\Rightarrow N_\rho = mR \underbrace{\dot{\phi}_\pi^2}_{4\omega_0^2} + m g \sin\pi - mR\omega_0^2 \underbrace{\cos\pi}_{-1} + m\omega_0^2 R \underbrace{\cos^2\pi}_1$$

$$\Rightarrow N_\rho = 4mR\omega_0^2 + 2mR\omega_0^2 \Rightarrow N_\rho = 6mR\omega_0^2$$

$$\text{y la fuerza es: } \vec{F}_N = -N_\rho \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_N = -6mR\omega_0^2 \hat{\rho}}$$

fuerza que ejerce la pared justo antes de salir del tubo.