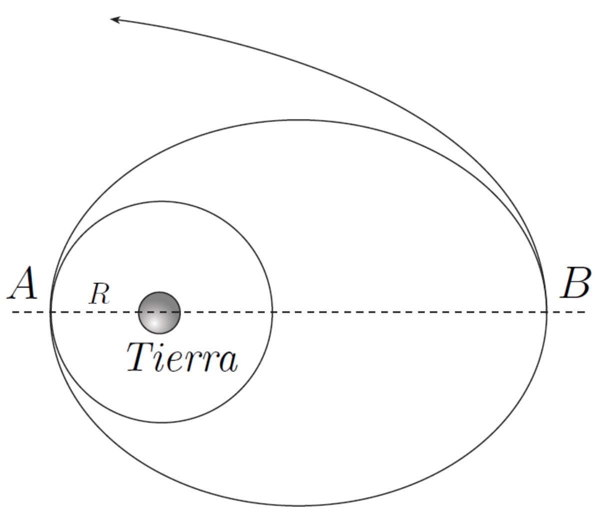
Ejercicio 5

Profesor: Andrés Escala, Profesores Auxiliares: Patricio Venegas A. y Alejandro Escobar N.

25 de Mayo de 2015. duración: 30 minutos.

Desde la tierra se desea lanzar un satélite en órbita parabólica y para ello se procede como sigue. Primero se coloca en una órbita circunferencial de radio R. En un punto A de esta órbita se dispara sus cohetes tangencialmente y queda en una órbita elíptica cuyo radio mínimo es R. Al alcanzar su radio máximo (punto B), se dispara nuevamente en forma tangencial sus cohetes, alcanzando la rapidez que obtuvo en A y queda en órbita parabólica. Se pide determinar:



(a) La rapidez del satélite en su órbita circunferencial.

(b) Excentricidad de la órbita elíptica (o sencillamente el cuociente entre los radios máximo y mínimo).

(c) Velocidades en A y B en el caso de la órbita elíptica.

datos: G, la masa M de la tierra y el radio R.

Ecuación física: $r(\theta) = \dfrac{\frac{l^2}{GM}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon l^2}{(GM)^2}} cos(\theta - \theta_0)}$

Ecuación geométrica: $r(\theta) = \dfrac{r_0(1+e)}{1 + e\ cos(\theta - \theta_0)}$

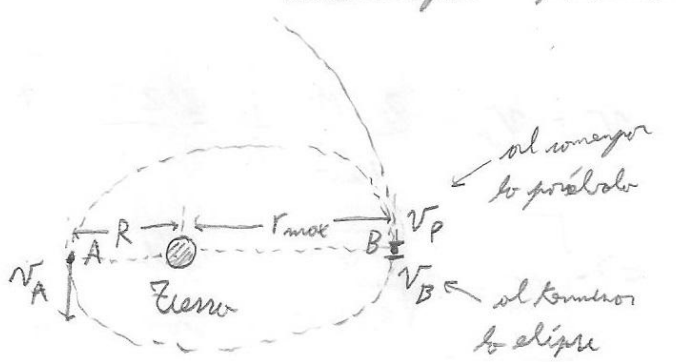
Punto Ejercicio 5

a) · En circunferencia: $e = 0$, $r_0 = R$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\ell^2}{GM} = R$

y $\vec{r} \perp \vec{v}$ en circunferencia $\Rightarrow$ $\ell = R\,v_c$ (velocidad en circunferencia)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\ell^2}{GM} = R \\ \ell = R\,v_c \end{array}\right\} \; R^{\cancel{2}} v_c^2 = \cancel{R}\,GM \;\Rightarrow\; \boxed{v_c = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}}$$

b) · Lo que sabemos es que la velocidad al comenzar la elipse es la misma que la velocidad al comenzar la parábola:



$\Rightarrow$ $v_B < v_A$

$v_B < v_P$

y $\boxed{v_P = v_A}$ por enunciado (1)

· En la parábola: $\varepsilon_p = 0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_p = \dfrac{v_P^2}{2} - \dfrac{GM}{r_{max}} = 0 \Rightarrow \boxed{v_P^2 = \dfrac{2GM}{r_{max}}}$ (2)

(punto B)

· Conservación de energía en la elipse: $\varepsilon_A = \varepsilon_B$, en ambos puntos $\vec{v} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{\ell^2}{2R^2} - \frac{GM}{R} = \varepsilon_B = \frac{v_B^2}{2} - \frac{GM}{r_{max}} = \frac{\ell^2}{2 r_{max}} - \frac{GM}{r_{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_{max}^2}\right) = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

$$\Rightarrow \ell^2 = 2GM\,\frac{R^{\cancel{2}}\,r_{max}^{\cancel{2}}}{\cancel{R\,r_{max}}}\;\frac{\cancel{r_{max} - R}}{\underbrace{r_{max}^2 - R^2}_{(\cancel{r_{max} - R})(r_{max} + R)}} \;\Rightarrow\; \boxed{\ell^2 = \frac{2GM\,R\,r_{max}}{r_{max} + R}} \quad (3)$$

• momento en órbita elíptica (en A): $\ell = R v_A \overset{(1)}{=} R v_P \Rightarrow \ell^2 = R^2 v_P^2$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\ell^2 = \frac{2GMR^2}{r_{max}}} \quad (4)$$

• usando (4) en (3): $\frac{2\cancel{GM}R^2}{r_{max}} = \frac{2\cancel{GM}\, R\, r_{max}}{R + r_{max}} \Rightarrow (R + r_{max})R = r_{max}^2$

$$\Rightarrow r_{max}^2 - R r_{max} - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{max} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = R\,\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

solución física (+), radio negativo no tiene sentido.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{r_{max}}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad (5)$$

c) • De (1) y (2) tenemos que: $v_P^2 = v_A^2 = \frac{2GM}{r_{max}} \cdot \underbrace{\frac{R}{R}}_{1} = \frac{2GM}{R}\underbrace{\frac{R}{r_{max}}}_{(5)^{-1}}$

$$(5) \Rightarrow v_A^2 = \frac{2GM}{R}\,\frac{2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{v_A = 2\sqrt{\frac{GM}{R(1+\sqrt{5})}}}$$

velocidad en A, al comenzar la elipse.

• Como en la elipse se conserva el momentum:

$$\ell^2 = v_A^2 R^2 = v_B^2 r_{max}^2 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 \left(\frac{R}{r_{max}}\right)^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2^4 GM}{R}}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^3} \Rightarrow \boxed{v_B = 4\sqrt{\frac{GM}{R(1+\sqrt{5})^3}}}$$

velocidad en B al terminar la elipse. (justo antes de comenzar la parábola).