

P11 Leyes de Kepler:

a) segunda ley: "áreas iguales en tiempo iguales".



• $\vec{r} \times d\vec{r}$ nos entrega 2 veces el área barrido por $\vec{r}$ en un intervalo pequeño (el área real infinitesimal)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} = d\vec{S} \quad \rightarrow$$

• vemos cómo varía esto en el tiempo: $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times d\vec{r}) = 2 \frac{d}{dt} d\vec{S}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times d\vec{r} + \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2 \frac{d\vec{S}}{dt}$$

misma dirección

de momento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

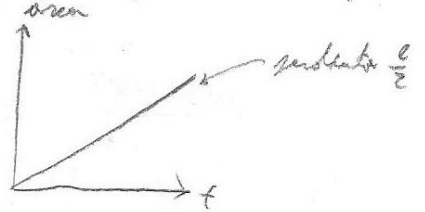
etc!

• En fuerza central no hay torques $\Rightarrow \vec{L}$ se conserva

$$\Rightarrow \vec{L} = 2 \frac{d\vec{S}}{dt} \quad ||(\cdot)|| \Rightarrow ||\vec{L}|| = 2 \left\| \frac{d\vec{S}}{dt} \right\| \Rightarrow L = 2 \frac{dS}{dt}$$

• usando L este problema lleva la relación: $L dt = 2 dS$ e integro en en tiempo:

$$\Rightarrow \int_0^t L dt = \int_0^{\text{área}} 2 dS \Rightarrow \boxed{\text{área}(t) = \frac{L}{2} t}$$

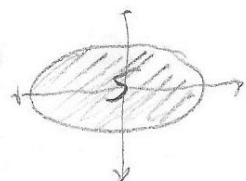


$\Rightarrow$ El área crece linealmente con el tiempo.

• En particular, el área de una órbita cerrada

$$\int_0^T L dt = \int_0^S 2 dS \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2S}{L}}$$



- con T el periodo
- y S el área total [1]

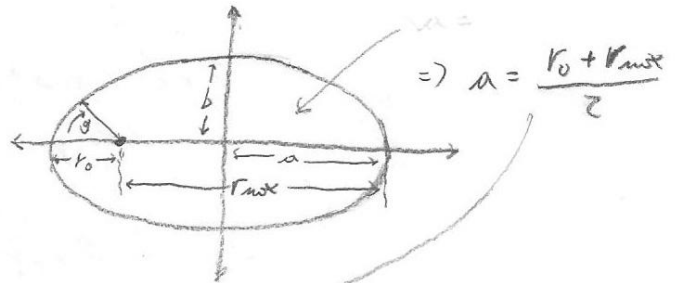
b) Tercera ley: " $T^2 \propto a^3$ para planetas con órbitas elípticas" *semieje mayor*

• Usando la 2da ley: $T = \frac{2S}{l}$ y el área de la elipse: $S = \pi a b$ *semieje mayor*

• Entonces: $T = \frac{2\pi a b}{l}$, debemos calcular a y b .

$$2a - r_{\text{máx}} = r_0$$

• $r(\theta) = \frac{r_0(1+e)}{1+e \cos \theta}$ *ex. geométrico*

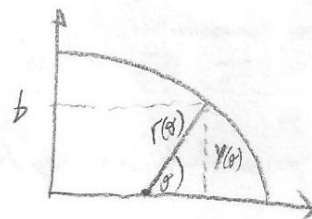


$$\Rightarrow a = \frac{r_0 + r_{\text{máx}}}{2}$$

$$\Rightarrow r_{\text{máx}} = r(\theta = \pi) = r_0 \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow a = \frac{r_0}{2} \left(1 + \frac{1+e}{1-e} \right) \Rightarrow a = \frac{r_0}{1-e}$$

• Ahora calculamos b usando la altura $Y(\theta)$:

$$\Rightarrow Y(\theta) = \sin \theta r(\theta) = \frac{r_0(1+e)}{1+e \cos \theta} \sin \theta$$



• y $Y=b$ es el máximo de la función, buscamos:

$$\frac{\partial Y(\theta)}{\partial \theta} = \frac{r_0(1+e) \cos \theta}{1+e \cos \theta} + \frac{e r_0(1+e) \sin^2 \theta}{(1+e \cos \theta)^2} = 0 \quad \leftarrow \text{extremos}$$

$$\Rightarrow \frac{r_0(1+e)}{(1+e \cos \theta)^2} \left[\cos \theta + \frac{e \sin^2 \theta}{1+e \cos \theta} \right] = 0 \Rightarrow \cos \theta = -e \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1-e^2}$$

• entonces: $b = Y_{\text{máx}} = \frac{r_0(1+e)\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = r_0 \frac{\sqrt{1+e}\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}\sqrt{1-e}} \Rightarrow b = r_0 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$

• Podemos expresar b en función de a . $b^2 = r_0(1+e) \frac{r_0}{1-e} = r_0(1+e)a \Rightarrow b = \sqrt{r_0 a(1+e)}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi a^{3/2}}{l} \sqrt{r_0(1+e)} \quad \text{Eliminamos el módulo y obtenemos la ec. física:}$$

geometría: $r(\theta) = \frac{r_0(1+e)}{1+e \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{GM}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GM)^2}} \cos \theta} \Rightarrow r_0(1+e) = \frac{L^2}{GM}$

relaciona entre el período y el semieje mayor.

$$\Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{L^2} a^3 r_0(1+e) = \frac{(2\pi)^2}{L^2} a^3 \frac{L^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} a^3$$

PZ cometa Halley: Datos: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $T = 75 \text{ años} \rightarrow 2.37 \cdot 10^9 \text{ s}$

a) usando la tercera ley: $T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM_\odot} a^3 \Rightarrow a = \left(\frac{GM_\odot T^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3}$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} (2.37 \cdot 10^9)^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} \quad \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m}^2}{\text{kg}^2} \text{kg} \text{s}^2 \rightarrow \text{m}^3$$

$$\Rightarrow a = 2.67 \cdot 10^{12} \text{ m} = 17.8 \text{ AU} \quad (1 \text{ AU} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})$$

b) v_0 sea la velocidad en r_0 , y como el momento angular se conserva:

$$\Rightarrow L^2 = GM r_0(1+e) = (r_0 v_0)^2 \Rightarrow 1+e = \frac{r_0 v_0^2}{GM_\odot} \Rightarrow e = \frac{r_0 v_0^2}{GM_\odot} - 1$$

y $a = \frac{r_0}{1-e} \Rightarrow e = \frac{(1-e) a v_0^2}{GM_\odot} - 1 \Rightarrow e \left(1 + \frac{a v_0^2}{GM_\odot} \right) = \frac{a v_0^2}{GM_\odot} - 1$

$$\Rightarrow e = \frac{\frac{a v_0^2}{GM_\odot} - 1}{\frac{a v_0^2}{GM_\odot} + 1} \Rightarrow \frac{a v_0^2}{GM_\odot} = \frac{\frac{\text{m}^3 \text{kg}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}^3 \text{kg}^2}{\text{s}^2}} \frac{(2.67 \cdot 10^{12})(55.000)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}} = 60.55$$

$$\Rightarrow e \approx 0.967$$

para la velocidad en el punto más lejano, usando la conservación de momento angular:

$$l = r_0 v_0 = a(1-e) v_0 = r_{\max} v_{\min} \quad \text{velocidad en punto más lejano}$$

$$\gamma \quad r_{\max} = r_0 \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow v_{\min} = \frac{a}{r_0} \frac{(1-e)^2}{1+e} v_0 = \frac{a}{a(1-e)} \frac{(1-e)^2}{1+e} v_0$$

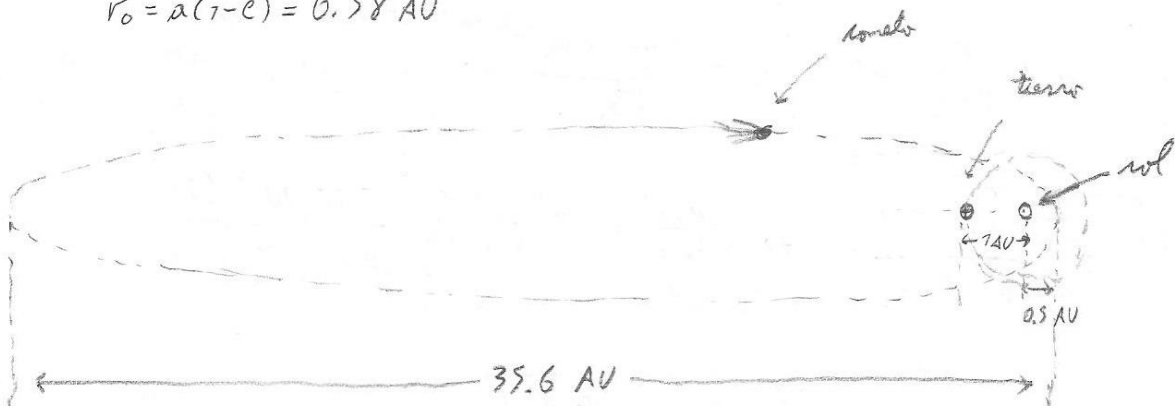
$$\Rightarrow \boxed{v_{\min} = v_0 \frac{1-e}{1+e}} \Rightarrow v_{\min} = 55 \left(\frac{\text{km}}{\text{s}} \right) \frac{1-0.967}{1+0.967} \approx 0.92 \left(\frac{\text{km}}{\text{s}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{\min} \approx 0.92 \left(\frac{\text{km}}{\text{s}} \right)}$$

c) Lo importante a notar aquí es que el cometa Halley tiene excentricidad casi 1; esto hace de ser una parábola (o más exactamente en órbita muy achatada). Además, el semieje mayor es mucho mayor que la distancia tierra-sol. Y como el cometa sobrevuela en un punto cercano al sol, se puede tomar como buena aproximación decir que un período es de 75 años.

$$a = 17.8 \text{ AU} \quad \text{distancia tierra-sol} = 1 \text{ AU}$$

$$r_0 = a(1-e) = 0.58 \text{ AU}$$



P3) Dato: (M_z, R_z, r_B)

a) • En órbita parabólica: $\epsilon_p = 0 \Rightarrow \epsilon_p = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_z}{r}$ se conserva en todo instante.

• Evaluamos en instante $r = r_B$ y calculamos la velocidad: $\epsilon_p = \frac{v_B^2}{2} - \frac{GM_z}{r_B} = 0$

$$\Rightarrow \frac{v_B^2}{2} = \frac{GM_z}{r_B} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2GM_z}{r_B}}} \quad (1) \quad \text{velocidad en B justo antes de frenar.}$$

b) • necesitamos saber qué energía tiene la órbita elíptica.

$\epsilon_e = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_z}{r}$ se conserva. Se evaluamos en los puntos B y C ($\dot{r} = 0$) y

↖ también se conserva.

$$v_{B,C}^2 = \dot{r}_{B,C}^2 + r_{B,C}^2 \dot{\theta}_{B,C}^2 = \frac{l^2}{r_{B,C}^2} \Rightarrow \epsilon_e = \frac{l^2}{2r_B^2} - \frac{GM_z}{r_B} = \frac{l^2}{2R_z^2} - \frac{GM_z}{R_z} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_C = R_z \\ \text{radio de} \\ \text{zeta} \end{array} \right.$$

despejamos $l^2 \Rightarrow l^2 \left(\frac{1}{2r_B^2} - \frac{1}{2R_z^2} \right) = GM_z \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{R_z} \right)$

$$\Rightarrow l^2 = GM_z \left(\frac{R_z - r_B}{R_z r_B} \right) \left(\frac{2r_B^2 R_z^2}{R_z^2 - r_B^2} \right) = 2GM_z \frac{(R_z - r_B) r_B R_z}{(R_z - r_B)(R_z + r_B)} \Rightarrow \boxed{l^2 = 2GM_z \frac{r_B R_z}{R_z + r_B}}$$

y en el punto B se cumple: $l = r_B v_B^*$

$$\Rightarrow r_B^2 v_B^{*2} = \frac{2GM_z r_B R_z}{R_z + r_B} \Rightarrow \boxed{v_B^* = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z + r_B} \frac{R_z}{r_B}}}$$

• la diferencia de velocidad es: $\Delta v = v_B - v_B^* \Rightarrow \boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{2GM_z}{r_B}} \left(1 - \sqrt{\frac{R_z}{R_z + r_B}} \right)}$

c) Podemos usar la fórmula del momento angular orbital porque seguimos en la órbita elíptica:

$$L^2 = R_z^2 v_z^2 = \frac{2GM_z r_B R_z}{r_B + R_z}$$

$$\Rightarrow v_z = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z + r_B} \frac{r_B}{R_z}}$$

velocidad con la que vamos hacia Zebes.