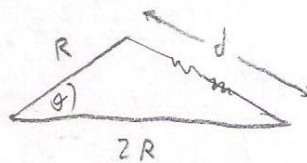
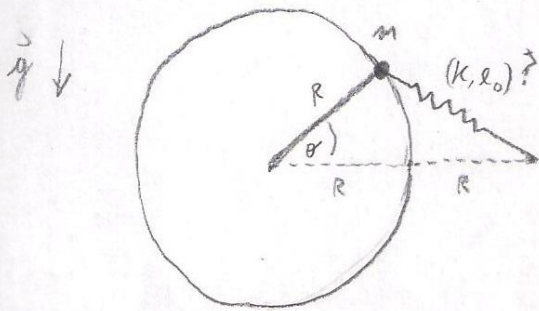


Punto P2, C2

geometría:

Teorema del coseno:

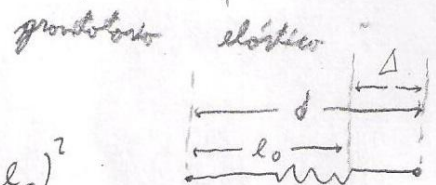


$$d^2 = (2R)^2 + R^2 - R(2R)2\cos\theta$$

$$\Rightarrow d = R\sqrt{5-4\cos\theta}$$

a) Para saber equilibrio mínimo potencial del sistema: $U = U_{mg} + U_e$

La normal no tiene un potencial asociado.



$$U_{mg} = mgh = mgR\sin\theta$$

altura de m



$$U_e = \frac{k}{2}(d - l_0)^2$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{k}{2}(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0)^2$$

Potencial:

$$U(\theta) = mgR\sin\theta + \frac{k}{2}(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0)^2 \quad (1)$$

+1.0

Derivada: $\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR\cos\theta + kR\frac{2}{2}(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0)\frac{1}{2}\frac{4\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\theta_1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ en equilibrio: $\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta}(\frac{\pi}{2}) = 0 = mgR\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2kR\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{5-4\cos\frac{\pi}{2}}}(R\sqrt{5-4\cos\frac{\pi}{2}} - l_0)$

$$\Rightarrow \frac{2kR}{\sqrt{5}}(R\sqrt{5} - l_0) = 0 \Rightarrow l_0 = R\sqrt{5} \quad (2)$$

+1.0

b) $\theta_2 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ en equilibrio: $\frac{\partial U}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0$ y mundo (2)

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{3} \right) = mgR \cos \frac{\pi}{3} + \frac{2Rk \sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{5-4\cos \frac{\pi}{3}}} (R\sqrt{5-4\cos \frac{\pi}{3}} - R\sqrt{5}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{mgR}{2} + \frac{2kR^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (\underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{5}}_{<0}) = 0 \Rightarrow kR(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{2R(\sqrt{5}-\sqrt{3})}} \quad \text{aproximación: } \sqrt{5}-\sqrt{3} \approx 0.5 \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{R}} \quad (3) \quad \boxed{+1.0}$$

c) mundo (2) y (3) en la derivada: $\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR \cos \theta + \frac{mgR^2}{R} (\sqrt{5-4\cos \theta} - \sqrt{5}) 2 \sin \theta \frac{1}{\sqrt{5-4\cos \theta}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR \left[\cos \theta + 2 \sin \theta - \frac{2\sqrt{5} \sin \theta}{\sqrt{5-4\cos \theta}} \right] \quad \text{y la segunda derivada:}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR \left[-\sin \theta + 2 \cos \theta - \frac{2\sqrt{5} \cos \theta}{\sqrt{5-4\cos \theta}} + \frac{2}{\sqrt{5-4\cos \theta}} \frac{\sqrt{5} \sin \theta}{(5-4\cos \theta)^{3/2}} (4 \sin \theta) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR \left[-\sin \theta + 2 \cos \theta - \frac{2\sqrt{5} \cos \theta}{\sqrt{5-4\cos \theta}} + \frac{4\sqrt{5} \sin^2 \theta}{(5-4\cos \theta)^{3/2}} \right]} \quad (4) \quad \boxed{+1}$$

$$\cdot \theta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = mgR \left[-1 + 0 + 0 + \frac{4\sqrt{5} (1)^2}{(5-0)^{3/2}} \right] = mgR \left(\frac{4}{5} - 1 \right) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ es un equilibrio inestable}} \quad (5) \quad \boxed{+0.5}$$

$$\bullet \theta_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\pi}{3} \right) = mgR \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{5}}{\sqrt{5-2}} + \frac{4\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\sqrt{5-2}(5-2)} \right]$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

+0.5

$$\Rightarrow = \frac{mgR}{2} (2 - \sqrt{3}) > 0$$

+

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{\pi}{3} \text{ es equilibrio estable}} \quad (6)$$

Frecuencia de pequeñas oscilaciones:

$$\theta = \theta_2 + \delta\theta = \frac{\pi}{3} + \delta\theta \quad \text{con } \delta\theta \ll 1$$

$$\Rightarrow U(\theta) = U\left(\frac{\pi}{3} + \delta\theta\right) = U\left(\frac{\pi}{3}\right) + \delta\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{3} \right) + \frac{\delta\theta^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

Energía: $E = K + U \Rightarrow E(\delta\theta) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\delta\theta}^2 + U(\delta\theta) \quad / \cdot \frac{1}{mR^2}$

$$\Rightarrow \frac{E}{mR^2} \equiv \mathcal{E} = \frac{\dot{\delta\theta}^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{mR^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\pi}{3} \right)}_{\downarrow} \frac{\delta\theta^2}{2} + U\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

Forma de pequeñas oscilaciones:

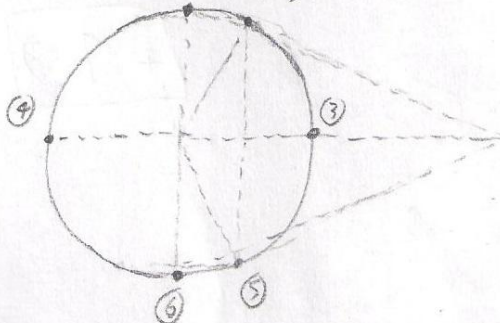
$$\mathcal{E} = \frac{\dot{\delta\theta}^2}{2} + \omega^2 \frac{\delta\theta^2}{2} + C \Rightarrow \ddot{\delta\theta} + \omega^2 \delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{mR^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad \text{de (6)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{2R} (2 - \sqrt{3})}} \quad (7) \quad +0.5$$

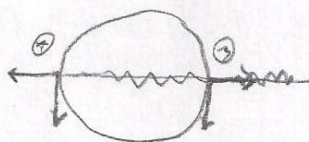
d) Dado la simetría del problema se espera que haya 1 o 2 equilibrios más. Los candidatos son:

① $\frac{\pi}{2}$ (estable) ② $\frac{\pi}{3}$ (estable)



Los candidatos ③ y ④ se prueban
descartando inmediatamente con $\frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\text{③}} \neq 0$
 $\neq \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\text{④}} \neq 0$

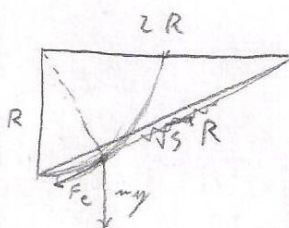
• o bien físicamente:



→ En los puntos 3 y 4
las fuerzas no se equilibran!

• ⑤ se puede ver matemáticamente que no cumple $\frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_5 = 0$

• físicamente tiene sentido:



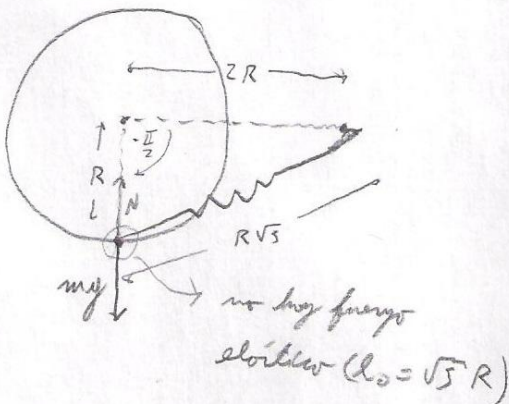
→ si el resorte está estirado
menos de $l_0 = R\sqrt{5}$ intentará
volver a la mano de 5 y
el peso hará lo mismo.

• ⑥ es el único candidato porque el

matemáticamente: $\frac{\partial V}{\partial \theta} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = mgR \left[0 - 2 + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{2} = \theta \text{ es equilibrio}}$

$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = mgR \left[+1 + 0 - 0 + \frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \right] > 0 \quad \cup \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ es estable}}$

Físicamente: en $-\frac{\pi}{2}$ el resorte está en su largo natural $l_0 = R\sqrt{5}$. Por ende,
en esta posición no sentirá fuerza alguna del resorte, sólo
sentirá la gravedad, la cual no puede mover a la partícula
pues está limitada por la pared. Si se le da un golpecito a la partícula,
no hay fuerzas en la dirección de $-\frac{\pi}{2}$ que la hagan salir del equilibrio



+ 1.0

no hay fuerza
elástica ($l_0 = \sqrt{5} R$)