

Punto Ave 14

P1

$$V(x) = \frac{-Wd^2(x^2+d^2)}{x^4+8d^4}$$

W: unidades de energía
d: " de longitud

a) equilibrio: $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-2Wd^2x}{x^4+8d^4} + \frac{Wd^2(x^2+d^2)}{(x^4+8d^4)^2} (4x^3)$

$$= \frac{1}{(x^4+8d^4)^2} [-2Wd^2x^5 - 16Wd^6x + 4Wd^2x^5 + 4Wd^4x^3]$$

$$= \frac{2Wd^2}{(x^4+8d^4)^2} [-x^5 - 8d^4x + 2d^2x^3]$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{2Wd^2}{(x^4+8d^4)^2} x(x^4 - 8d^4 + 2d^2x^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

$$\Rightarrow x^4 + 2d^2x^2 - 8d^4 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$y^2 + 2d^2y - 8d^4 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + 32d^4}}{2} = -d^2 \pm 3d^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2d^2 \Rightarrow \boxed{x_2 = +d\sqrt{2}, x_3 = -d\sqrt{2}}, y_2 = -4d^2 \Rightarrow x_{3,4} \text{ son imaginarios (no existen)}$$

b) ¿Estabilidad? $\frac{1}{2Wd^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{5x^4 + 6d^2x^2 - 8d^4}{(x^4+8d^4)^2} + \frac{8d^4x - 2d^2x^3 - x^5}{(x^4+8d^4)^3} (8x^3)$

es positivo,

¿esto nos ayuda al signo!

$$= \frac{1}{(x^4+8d^4)^3} [5x^8 + 40d^4x^4 + 6d^2x^6 + 48d^6x^2 - 8d^4x^4 - 64d^8 + 64d^4x^4 - 16d^2x^6 - 8x^8]$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+8d^4}{2Wd^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -3x^8 - 70d^2x^6 + 96d^4x^4 + 48d^6x^2 - 64d^8$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0) \propto -64d^2 < 0 \Rightarrow \cap \quad \boxed{x_1 = 0 \text{ ist instabil}}$$

(Hinweis)

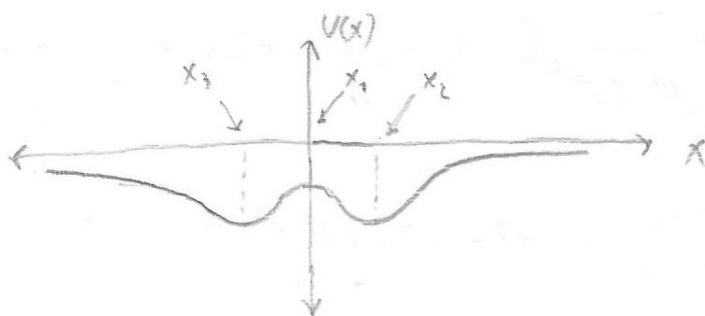
• aber! denn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ hängt von x^2 (so dass x^n mit n ungerade) $\Rightarrow$ nicht nur wichtig

$$x_2^2 \text{ und } x_3^2 \text{ sind mit } x_2^2 = x_3^2 = 2d^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x^2 = 2d^2) \propto d^8 (-148 - 80 + 384 + 96 - 64) = d^8 288 > 0$$

$$\Rightarrow \cup \quad \boxed{x_2 = +d\sqrt{2} \text{ und } x_3 = -d\sqrt{2} \text{ sind stabil}}$$

Skizze:





• fuerza: $\vec{F} = (-kx + \frac{k}{\alpha^2} x^3) \hat{x}$, $k, \alpha > 0$

a) • Es conservativa! $\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$ $F_y = F_z = 0$

$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$

$\Rightarrow U = -\int F_x dx = -\int (-kx + \frac{k}{\alpha^2} x^3) dx = k\frac{x^2}{2} - \frac{k}{\alpha^2} \frac{x^4}{4} + C$

$\Rightarrow U(x) = k\frac{x^2}{2} - \frac{k}{\alpha^2} \frac{x^4}{4} + C$

b) equilibrio: $\hat{x} m \ddot{x} = \vec{F} \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow xk(-1 + \frac{1}{\alpha^2} x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k - \frac{3k}{\alpha^2} x^2 \Rightarrow x_1$ es estable
 x_2 y x_3 son inestables.

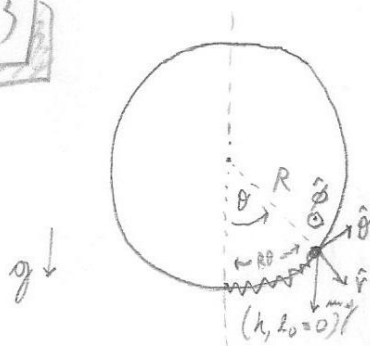
• Luego, lo que quiero es llegar de x_2 (o x_3) hasta x_1 inyectando una velocidad inicial v_0 en $\hat{x}$. $\vec{v}(t=0) = v_0 \hat{x}$ sólo necesitamos que llegue.

• Energía: $E_k = E_p \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{2} + U(0) = 0 + U(\pm\alpha)$

$K_k + U_k = K_f + U_f \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + C = 0 + k\frac{\alpha^2}{2} - k\frac{\alpha^4}{4} + C$

$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k\alpha^2}{4} \Rightarrow v_0 = \pm \alpha \sqrt{\frac{k}{2m}}$ (+1) me lo hace $x_2 = \alpha$
(-1) " " " $x_3 = -\alpha$

P3



a) momento angular: $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$

$$= m R \hat{r} \times R \dot{\theta} \hat{\theta} = m R^2 \dot{\theta} \hat{\phi}$$

Torques: $\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}_{\text{ext}} + \vec{r} \times \vec{N} + \vec{r} \times \vec{F}_e$

$$= R \hat{r} \times (m g \cos \theta \hat{r} - m g \sin \theta \hat{\theta} - k(R\theta - 0) \hat{\phi})$$

$$= -R m g \sin \theta \hat{\phi} - R^2 k \theta \hat{\phi}$$

Usamos esférico $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$

ec. de Torque: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m R^2 \dot{\theta} \hat{\phi}) = -(R m g \sin \theta + R^2 k \theta) \hat{\phi}$

$$\Rightarrow m R^2 \left(\ddot{\theta} \hat{\phi} + \dot{\theta} \frac{d\hat{\phi}}{dt} \right) = -m R^2 \left(\frac{g}{R} \sin \theta + \frac{k}{m} \theta \right) \hat{\phi}$$

$$- \dot{\theta} \underbrace{\left(\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \right)}_{\vec{e}_\phi}$$

• más tarde el oro no gira ($\dot{\theta} = 0$)

equilibrio: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta + \frac{k}{m} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{R} \sin \theta_{eq} + \frac{k}{m} \theta_{eq} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = 0}$$

• pequeña oscilación: $\theta = \theta_{eq} + \delta\theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\delta\theta} \quad \text{y} \quad \sin \delta\theta = \delta\theta$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m} \right) \delta\theta = 0$$

ω^2 : frecuencia de P.O

período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R} + \frac{k}{m}}}}$$

período de pequeña oscilación.

b) Ahora si el oro gira con velocidad angular $\dot{\theta} = \Omega$ muy pequeña, asumimos que el equilibrio se mantiene, pero la frecuencia cambiará levemente:



· show $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = mR\hat{r} \times (R\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta R\dot{\phi}\hat{\phi})$
 $= mR^2(\dot{\theta}\hat{\phi} - \sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta})$

· show hay una normal en $\hat{\phi}$ debido al momento; el torque es idéntico al anterior pero con un torque de la normal:

$$\vec{\tau}_N = \vec{r} \times \vec{N} = R\hat{r} \times N\hat{\phi} = -RN\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mR^2(\dot{\theta}\hat{\phi} - \sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta})) = -mR^2\left(\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{k}{m}\theta\right)\hat{\phi} + RN\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\theta}\frac{d\hat{\phi}}{dt} - \sin\theta\dot{\phi}\ddot{\theta}\hat{\theta} - \sin\theta\dot{\phi}\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\left(\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{k}{m}\theta\right)\hat{\phi} - \frac{N}{mR}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\hat{\phi} - \dot{\theta}\sin\theta(\dot{\phi}\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}) - \sin\theta\dot{\phi}\ddot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\dot{\theta}\hat{r} - \sin^2\theta\dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} = \sum \vec{\tau} \frac{1}{mR^2}$$

· La ec. en $\hat{\theta}$ nos da una relación para la normal $\Rightarrow$ no nos interesa

$$\hat{\phi} \quad \ddot{\theta} - \sin^2\theta\dot{\phi}\cos\theta = -\left(\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{k}{m}\theta\right)$$

· haremos pequeñas oscilaciones con $\theta = \theta_{eq} + \delta\theta$ en $\theta_{eq} = 0$

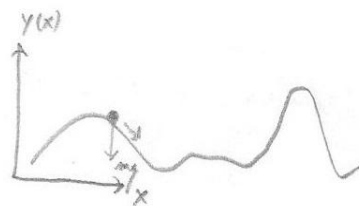
$$\Rightarrow \delta\ddot{\theta} - \sin^2\theta_{eq}\dot{\phi}\cos\theta_{eq}\delta\theta + \frac{g}{R}\sin\theta_{eq}\delta\theta + \frac{k}{m}\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m} - \sin^2\theta_{eq}\right)}_{\omega^2} \delta\theta = 0$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R} + \frac{k}{m} - \sin^2\theta_{eq}}}$$

· si Ω es suficientemente pequeño, θ_{eq} sigue siendo un equilibrio estable, ¡si Ω crece mucho el equilibrio se volverá inestable!

P4) La partícula se mueve en una superficie:



a) • A solo hay gravedad, entonces tenemos un potencial gravitatorio:

$$U(x) = mgy(x) \quad \text{altura}$$

$$\Rightarrow U(x) = mg(ax^2 - \cos x)$$

b) • equilibrio: $\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = mg(2ax + \sin x) = 0$

• solución trivial: $x_1 = 0$

• Ahora si queremos que $x_2 = \frac{\pi}{6}$ sea solución: $2a\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2\pi}$

c) mostrar el valor de "a" en $\frac{\partial U}{\partial x}$: $\frac{\partial U}{\partial x} = mg\left(-\frac{3}{\pi}x + \sin x\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = mg\left(-\frac{3}{\pi} + \cos x\right) \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0) = mg\left(1 - \frac{3}{\pi}\right) > 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ es estable}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{6}\right) = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{\pi}\right) = \frac{mg}{2\pi}(\pi\sqrt{3} - 6) < 0 \quad \wedge \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} \text{ es inestable}$$

d) • $x = x_1 + \delta x$ a pequeña orden en la energía:

• velocidad: $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = \dot{x}\left[\hat{x} + \left(\sin x - \frac{3}{\pi}x\right)\hat{y}\right] \Rightarrow v = \dot{x}\sqrt{1 + \left(\sin x - \frac{3}{\pi}x\right)^2}$

• Energía: $E = \frac{m}{2}v^2 + U(x) = \frac{m}{2}\delta\dot{x}^2\left[1 + \left(\frac{\sin\delta x}{\delta x} - \frac{3}{\pi}\right)^2\right] + mg\left(-\frac{3}{2\pi}\delta x^2 - \cos\delta x\right)$

$$\Rightarrow \frac{E}{m} = \varepsilon = \frac{\delta\dot{x}^2}{2} + \underbrace{\delta x^2 \delta x^2 \frac{(1 - \frac{3}{\pi})^2}{2}}_{\text{orden } \delta x^4} + g(-1 + \delta x^2(1 - \frac{3}{2\pi}))$$

• Ah, da igual por la energía

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta\dot{x}^2}{2} + \underbrace{g\left(\frac{2\pi-3}{\pi}\right) \frac{\delta x^2}{2}}_{\omega^2 > 0} - g \Rightarrow \omega = \sqrt{g\left(\frac{2\pi-3}{\pi}\right)}$$