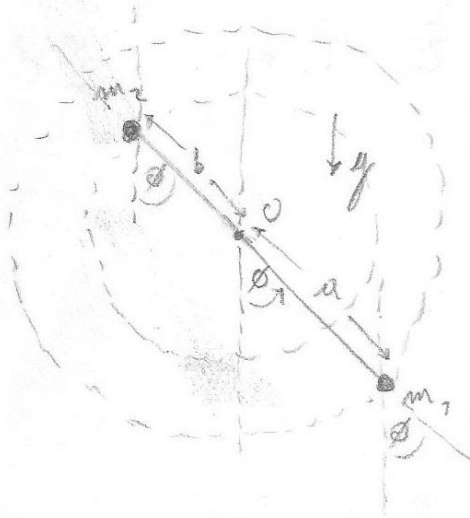


Punto especial 3



a) momento angular: $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$

- como el sistema converge en 0 y mediamos el ángulo ϕ con respecto a la vertical. $\hat{z}$ es el eje de la hoja. $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$
- calculamos el momento de cada partícula:

$$\vec{L}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = m_1 a \hat{r} \times (\dot{\phi} \hat{r} + a \dot{\phi} \hat{\phi})$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = a^2 \dot{\phi} \hat{z} m_1$$

$$\vec{L}_2 = m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = m_2 b \hat{r} \times (\dot{\theta} \hat{r} + b \dot{\theta} \hat{\theta}) = b^2 \dot{\theta} \hat{z} m_2$$

- El momento total es la suma de momentos: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$\Rightarrow \text{momento total del sistema: } \boxed{\vec{L} = (m_1 a^2 + m_2 b^2) \dot{\phi} \hat{z}} \quad (1)$$

+1.5

- Para el torque necesitamos las fuerzas:

DCL 1

DCL 2

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = m_1 g \cos \phi \hat{r} - m_1 g \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = m_2 g \cos \theta \hat{r} + m_2 g \sin \theta \hat{\theta}$$

• Torques: $\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = a \hat{r} \times m_1 g (\cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_1 = -a m_1 g \sin \phi \hat{z}}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = b \hat{r} \times m_2 g (-\cos\phi \hat{r} + \sin\phi \hat{\phi}) = b m_2 g \sin\phi \hat{z}$$

• Torque total es la suma de todos los torques: $\vec{\tau}_{\text{TOT}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \sum \vec{\tau}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{\text{TOT}} = (b m_2 - a m_1) g \sin\phi \hat{z}} \quad (2) \quad \boxed{+1.5}$$

b) usando la ec. de torque: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$

a) y (2) $\Rightarrow \frac{d}{dt} ((m_1 a^2 + m_2 b^2) \dot{\phi} \hat{z}) = (b m_2 - a m_1) g \sin\phi \hat{z}$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = g \sin\phi \left(\frac{b m_2 - a m_1}{m_1 a^2 + m_2 b^2} \right) \quad \text{ec. por el ángulo } \phi. \quad \boxed{+1.0}$$

Lo integramos con el cambio $\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \dot{\phi} \Rightarrow \int_{\phi_0}^{\phi} \dot{\phi} d\dot{\phi} = g \frac{b m_2 - a m_1}{b^2 m_2 + a^2 m_1} \int_{\phi_0}^{\phi} \sin\phi d\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2 = 2g \frac{b m_2 - a m_1}{b^2 m_2 + a^2 m_1} (\cos\phi_0 - \cos\phi)} \quad \boxed{+1.0}$$

c) se suelta del reposo ($\dot{\phi}_0 = 0$) en $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$), nos interesa la velocidad en $\phi = 0$ ($\dot{\phi}(\phi=0) = ?$)

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 - 0 = 2g \frac{b m_2 - a m_1}{b^2 m_2 + a^2 m_1} (0 - 1) \quad \text{y} \quad a m_1 > b m_2 \Rightarrow \text{podemos sacar raíz!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi}(\phi=0) = \sqrt{2g \frac{a m_1 - b m_2}{a^2 m_1 + b^2 m_2}}} \quad \boxed{+1.0}$$