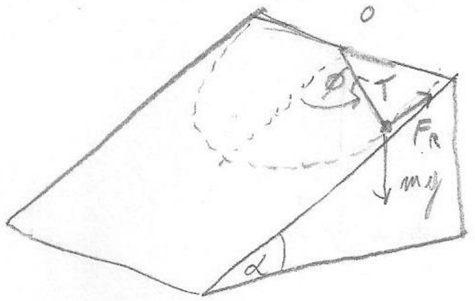
P1

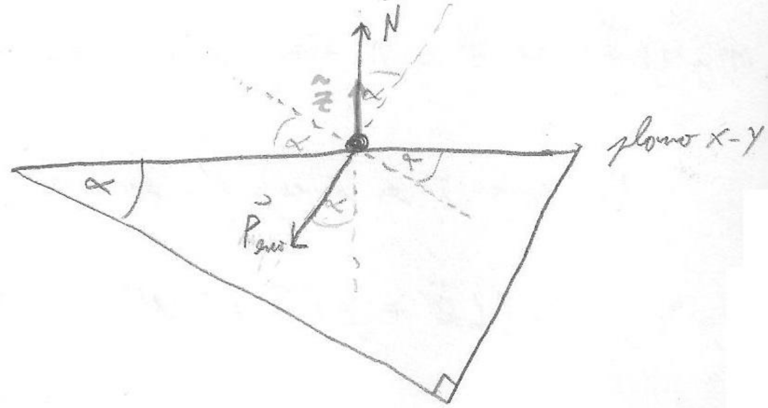
Pauta aux 7

a) vista isométrica:

· Usamos cilíndricas en el plano inclinado:

vista lateral:





De aquí salen las 2 primeras fuerzas:

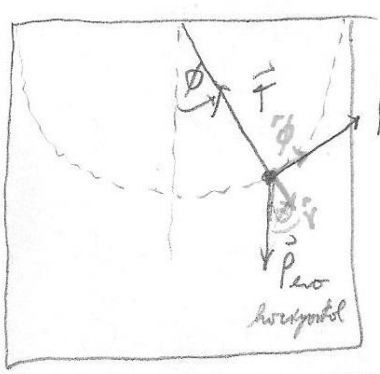
normal: $\boxed{\vec{N} = N\hat{z}}$ (1)

: la magnitud del peso es mg, pero su dirección está a priori en los 3 ejes.

$\vec{P}_{ero} = mg(\underbrace{P_r\hat{r} + P_\phi\hat{\phi}}_{horizontal} + \underbrace{P_z\hat{z}}_{vertical})$, la componente vertical es evidente del dibujo: $P_z = -\cos\alpha$

· mientras que la horizontal: $\sin\alpha$

vista aérea:



· vemos que el peso horizontal se separa en:

$$\vec{P}_{ero\ horizontal} = mg(\cos\phi\,\hat{r} - \sin\phi\,\hat{\phi})$$

· Lo que nos lleva a la forma final del peso:

$$\boxed{\vec{P}_{ero} = mg(\sin\alpha\cos\phi\,\hat{r} - \sin\alpha\sin\phi\,\hat{\phi} - \cos\alpha\,\hat{z})} \quad (2)$$

Tensión: $\boxed{\vec{T} = -T\hat{r}}$ (3)

$\boxed{\vec{F}_R = F_R\hat{\phi} = \mu N\hat{\phi}}$ (4)

Roce cinético: no nos interesa el roce estático, por lo que usamos el coef. de roce cinético. Sin fuerzas externas, la partícula tendería a moverse en $-\hat{\phi}$ por lo que el roce se opone a ello.

b) con las fuerzas vectoriales podemos escribir las ec. de movimiento:

$$m\vec{a} = \vec{F} = \vec{P}_{peso} + \vec{F}_R + \vec{T} + \vec{N}$$

usando $\vec{a}$ en cilíndricas con $z=0$ y $r=L \Rightarrow \dot{r}=\dot{z}=\ddot{r}=\ddot{z}=0$

(1) y (2) $\hat{z}]$ $m\underbrace{\ddot{z}}_{0} = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha$ (5)

$\hat{r}]$ como T es incógnita esta ec. no nos interesa.

(2) y (4) $\hat{\phi}]$ $m(L\ddot{\phi} + 2\underbrace{\dot{r}}_{0}\dot{\phi}) = \mu N - mg\sin\alpha\sin\phi \leftarrow (5)$

$$\Rightarrow mL\ddot{\phi} = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha\sin\phi \quad \Big/ \cdot \frac{\dot{\phi}}{mL}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}\ddot{\phi} = \frac{\mu g}{L}\cos\alpha\,\dot{\phi} - \frac{g}{L}\sin\alpha\,\dot{\phi}\sin\phi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu g}{L}\cos\alpha\,\phi\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{L}\sin\alpha\cos\phi\right)$$

integramos entre $t=0$ y t $\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}\right)dt = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu g}{L}\cos\alpha\,\phi + \frac{g}{L}\sin\alpha\cos\phi\right)dt$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - \underbrace{\frac{\dot{\phi}(0)^2}{2}}_{0 \text{ reposo}} = \frac{\mu g}{L}\cos\alpha\Big(\phi(t) - \underbrace{\phi(0)}_{\frac{\pi}{2}}\Big) + \frac{g}{L}\sin\alpha\Big(\cos(\phi(t)) - \underbrace{\cos(\underbrace{\phi(0)}_{\frac{\pi}{2}})}_{0}\Big)$$

y si evaluamos en un "tiempo final" en donde $\phi = 0$ y se llega al reposo: $\dot{\phi} = 0$, llegamos a:

$$\Rightarrow 0 = \frac{\mu g}{L}\cos\alpha\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{g}{L}\sin\alpha\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu g}{L}\cos\alpha\,\frac{\pi}{2} = \frac{g}{L}\sin\alpha \quad \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{2}{\pi}\tan\alpha}$$

P2

condición inicial $\left.\begin{array}{l} z(t=0) = 0 \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{array}\right\}$ (1)

a)

ec. de mov: $m\ddot{z} = -mg + \vec{f}$

¿hacia dónde apunta el roce?

El roce viscoso se define: $\vec{f} = -\gamma \vec{v}$, por lo que siempre se opone a la velocidad. Al lanzar la partícula hacia arriba, la velocidad $\dot{z}$ será positiva en $\hat{z}$ antes de alcanzar la altura máxima.

$$\Rightarrow \quad \vec{f} = -\gamma \dot{z}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg - \gamma\dot{z} = m\frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$(1) \Rightarrow -\int_{v_0}^{\dot{z}} \frac{m\, d\dot{z}}{mg + \gamma\dot{z}} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad t - 0 = \frac{m}{\gamma}\left[\ln(mg + \gamma v_0) - \ln(mg + \gamma\dot{z})\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{mg + \gamma v_0}{mg + \gamma\dot{z}}\right)} \quad (2)$$

• La altura máxima se alcanza cuando la partícula está instantáneamente en reposo en el aire: $\dot{z}(t_{max}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{max} = \frac{m}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{mg}\right)} \quad (3)$$

t_{max}: tiempo que demora la partícula en alcanzar la altura máxima.

b) Para la altura máxima necesitamos $z(t)$, para ello despejamos $\dot{z}$ de (2):

$$(2) \Rightarrow \frac{mg + \gamma v_0}{mg + \gamma\dot{z}} = e^{\frac{t\gamma}{m}} \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = e^{-\frac{t\gamma}{m}}\,\frac{mg + \gamma v_0}{\gamma} - \frac{mg}{\gamma} \quad (4)$$

Integramos (4) $\displaystyle\int_0^z dz = \frac{1}{\gamma}\int_0^t \left[e^{-\frac{t\gamma}{m}}(mg+\gamma v_0) - mg\right] dt$

$$\Rightarrow z - 0 = -\frac{m}{\gamma} e^{-\frac{t\gamma}{m}} \frac{mg+\gamma v_0}{\gamma} - \frac{mg}{\gamma} t + \frac{m}{\gamma}\left(\frac{mg+\gamma v_0}{\gamma}\right) + 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{m}{\gamma}\left[\frac{mg+\gamma v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{t\gamma}{m}}\right) - gt\right]$$

y la altura máxima es $z_{max} = z(t_{max})$

$$\Rightarrow z_{max} = z(t_{max}) = \frac{m}{\gamma}\left[\frac{mg+\gamma v_0}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{\gamma v_0}{gm}}\right) - g\frac{m}{\gamma}\ln\left(1+\frac{\gamma v_0}{mg}\right)\right]$$

$$= g\frac{m^2}{\gamma^2}\left[\left(1+\frac{\gamma v_0}{gm}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma v_0}{gm}\right)}\right) - \ln\left(1+\frac{\gamma v_0}{mg}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{max} = \frac{g m^2}{\gamma^2}\left[\frac{\gamma v_0}{mg} - \ln\left(1+\frac{\gamma v_0}{mg}\right)\right]}$$

altura máxima.