

Resuelto Ejercicio 1

$$a) \quad r=R \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0, \quad \dot{\theta}=\omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta}=0, \quad \theta = \int_{\theta_0=0}^{\theta} \omega_0 dt = \omega_0 t \quad \left. \vphantom{\int_{\theta_0=0}^{\theta}} \right\} (1)$$

$$z=R \sin \theta \Rightarrow \dot{z}=R \dot{\theta} \cos \theta = R \omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \ddot{z} = -R \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

calculamos $\vec{v}$ en cilíndricos: $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{v} = R \omega_0 \hat{\theta} + R \omega_0 \cos(\omega_0 t) \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R \omega_0 (\hat{\theta} + \cos(\omega_0 t) \hat{z})} \quad (2)$$

opción 1: matricial

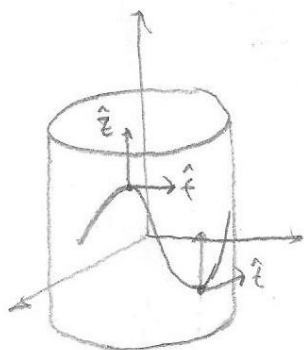
$$b) \quad \hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\hat{\theta} + \cos(\omega_0 t) \hat{z}}{\sqrt{1 + \cos^2(\omega_0 t)}} \quad \text{y vemos cuando se anula: } \hat{t} \cdot \hat{z}$$

$$\Rightarrow \hat{t} \cdot \hat{z} = \frac{\cos(\omega_0 t)}{\sqrt{1 + \cos^2(\omega_0 t)}} = 0? \Rightarrow \cos(\omega_0 t^*) = 0 \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\pi}{2\omega_0} (2n+1)}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$ $n=0, 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\pi}{2\omega_0} \wedge t^* = \frac{3\pi}{2\omega_0}}$$

opción 2: Geometría



se puede argumentar geométicamente que la tangente es $\perp$ a $\hat{z}$ en los mínimos y máximos del seno (que es cuando el coseno se anula)

$$\theta = t \omega_0 \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\pi}{2\omega_0} (2n+1)} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

(ambas opciones dan el mismo punto)

c) aceleración en cilindro: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$

modo (1) $\Rightarrow \vec{a} = -R\omega_0^2\hat{r} - R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)\hat{z}$ ambos como subíndices

y evaluamos en $t=t^*$: $\vec{a}(t^*) = -R\omega_0^2(\hat{r} \pm \hat{z})$ (4)

ahora evaluamos $\vec{v}$ en t^* : $\vec{v}(t^*) = R\omega_0\hat{\theta} + 0\hat{z}$

calculamos el producto cruz:

$$\vec{v}(t^*) \times \vec{a}(t^*) = (R\omega_0\hat{\theta}) \times (-R\omega_0^2)(\hat{r} \pm \hat{z})$$

$$\Rightarrow = -R^2\omega_0^3 \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = -R^2\omega_0^3 (\pm \hat{r} + 0\hat{\theta} - \hat{z})$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \times \vec{a})(t^*) = R^2\omega_0^3 (\mp \hat{r} + \hat{z})$$

norma: $\|\vec{v} \times \vec{a}\|(t^*) = R^2\omega_0^3 \sqrt{(\mp 1)^2 + 1} = R^2\omega_0^3 \sqrt{2}$

y $\vec{v}(t^*) = R\omega_0\hat{\theta} \Rightarrow |\vec{v}| = R\omega_0 \Rightarrow |\vec{v}|^3 = R^3\omega_0^3$

Radio de curvatura: $\rho(t^*) = \frac{|\vec{v}|^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{R^3\omega_0^3}{R^2\omega_0^3\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(t^*) = \frac{R}{\sqrt{2}}}$$