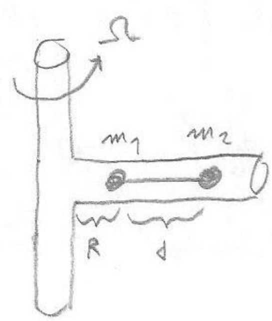
# Aux 5

**P1**

a)




• nota: no hay gravedad!

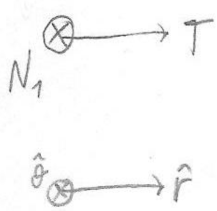
$\Rightarrow$ no hay fuerzas ni movimiento en $\hat{z}$, por lo tanto z es irrelevante para la dinámica del problema.

• Usamos polares. $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

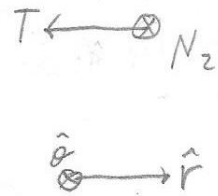
• identificamos: $\dot{\theta} = \Omega$ cte $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

• las ec. de movimiento quedan:

DCL $m_1$




DCL $m_2$




$\Rightarrow$

masa 1

$\hat{r}$ | $m_1(\ddot{r}_1 - r_1\Omega^2) = T \qquad (1)$

$\hat{\theta}$ | $m_1(2\dot{r}_1\Omega) = N_1 \qquad (2)$

masa 2

$\hat{r}$ | $m_2(\ddot{r}_2 - r_2\Omega^2) = -T \qquad (3)$

$\hat{\theta}$ | $m_2(2\dot{r}_2\Omega) = N_2 \qquad (4)$

b) Dado que $N_1$, $N_2$ y $T$ son incógnitas, tenemos que resolver las ec. sin estos términos. Para ello, sumamos (1) y (3):

$$(1)+(3) \Rightarrow m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2 - m_1 r_1\Omega^2 - m_2 r_2\Omega^2 = \underbrace{\cancel{T - T}}_{0}$$

Definimos la variable: $\mu = m_1 r_1 + m_2 r_2 \Rightarrow \ddot{\mu} = m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2$

$$\Rightarrow \ddot{\mu} - \mu\Omega^2 = 0 \rightsquigarrow \text{EDO}: \lambda^2 - \Omega^2 \cdot 1 = 0$$

ec. de 2do orden

$$\Rightarrow (\lambda - \Omega)(\lambda + \Omega) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \Omega, \quad \lambda_2 = -\Omega$$

• solución: $\mu(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \mu(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t}$ (5)

• para calcular $A$ y $B$ usamos condiciones iniciales (CI):

$$\dot{\mu}(0) = A\Omega \underbrace{e^{\Omega 0}}_{1} - B\Omega \underbrace{e^{-\Omega 0}}_{1} = m_1 \underbrace{\dot{r}_1(0)}_{0} + m_2 \underbrace{\dot{r}_2(0)}_{0} = 0$$

se suelta del reposo! $\Rightarrow$ no hay velocidad inicial!

$$\Rightarrow \Omega(A-B) = 0 \Rightarrow \boxed{A = B} \quad (6)$$

$\Omega \neq 0$

$$\mu(0) = A \cdot 1 + B \cdot 1 = m_1 \underbrace{r_1(0)}_{R} + m_2 \underbrace{r_2(0)}_{R+d} = 2A$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\Big( R(m_1+m_2) + d m_2 \Big)} \quad (7)$$

• Luego reemplazamos (5): $\mu(t) \overset{(6)}{=} A\underbrace{\left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}\right)}_{2\cosh(\Omega t)}$

$$\Rightarrow \mu(t) = \Big( R(m_1+m_2) + d m_2 \Big)\cosh(\Omega t) \quad (8)$$

• recordemos que: $\mu = m_1 r_1 + m_2 r_2$

• y además: $r_2 = d + r_1$

$$\Rightarrow \mu = r_1(m_1+m_2) + d m_2 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{m_1+m_2}(\mu - d m_2) \quad (9)$$

usando (9) en (8) $\Rightarrow r_1(t) = \left(R + \dfrac{m_2 d}{m_1+m_2}\right)\cosh(\Omega t) - \dfrac{m_2 d}{m_1+m_2}$

o bien: $$\boxed{r_1(t) = R\cosh(\Omega t) + \frac{m_2 d}{m_1+m_2}\left(\cosh(\Omega t) - 1\right)} \qquad (10)$$

10/

y $r_2 = r_1 + d$ $$\Rightarrow \boxed{r_2(t) = R\cosh(\Omega t) + \frac{m_2 d}{m_2+m_1}\left(\cosh(\Omega t) - 1\right) + d}$$

c) Al tener las posiciones explícitas en (10), podemos usar (1) o (3) para calcular la tensión de la cuerda:

$$(1) \Rightarrow \quad m_1\left(\ddot{r}_1 - r_1\Omega^2\right) = T \leftarrow \text{tensión}$$

· necesitamos $\ddot{r}_1$: $$(10) \Rightarrow \dot{r}_1 = R\Omega\sinh(\Omega t) + \frac{m_2 d\,\Omega}{m_1+m_2}\sinh(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}_1 = \Omega^2\cosh(\Omega t)\left(R + \frac{m_2 d}{m_1+m_2}\right)$$ en (1) queda:

$$(1) \longrightarrow \quad T = m_1\Omega^2\cosh(\Omega t)\left(\cancel{R} + \frac{m_2 d}{m_1+m_2}\right) - \cancel{R\Omega^2 m_1\cosh(\Omega t)}$$
$$- \frac{m_2 d}{m_1+m_2}\left(\cancel{\cosh(\Omega t)} - 1\right) m_1\Omega^2$$

sumando términos se llega a:

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_1 m_2\,\Omega\, d}{m_1+m_2}}$$