

Aux 1

P 1) a) $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = 1 \quad (1)$$

Longo de arco: $s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(t')\| dt' \stackrel{(1)}{=} \int_0^t dt' = t$

$$\Rightarrow s = t \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(s) \Rightarrow \boxed{\vec{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ s \end{pmatrix}} \quad (2)$$

b) vector tangente: $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$

curvatura: $\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) \Rightarrow \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s}$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5) \quad \text{usando (4) y (5) calculamos } \hat{n}$$

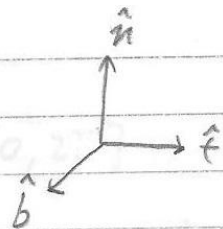
vector normal: $\frac{d\hat{t}}{ds} \frac{1}{k} = \hat{n} = - \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$

* La curvatura (k) es constante pues k no depende de t .

Esto se condice con una hélice que tiene siempre la misma curvatura.

vector binormal:

$$c) \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin s & \cos s & 1 \\ \cos s & \sin s & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(-\sin(s) \hat{i} + \cos(s) \hat{j} - (\cancel{\sin^2 s} + \cancel{\cos^2 s}) \hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin s \\ -\cos s \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Torsión:

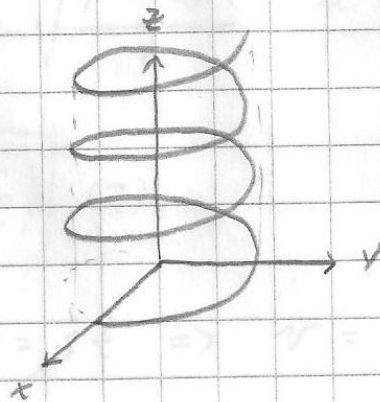
$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} \stackrel{(8), (6)}{=} - \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cancel{\cos^2 s} + \cancel{\sin^2 s})$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

La torsión también es constante dado que es una hélice cilíndrica

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



soluciones

P2

a) catenaria: $y = \cosh(x)$

Parametrizaciones: $x = t \Rightarrow y = \cosh(t)$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

b) largo de arco: $s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(t)\| dt'$, usando $\vec{r}'(t)$ de (1)

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t \cosh(t) dt = \sinh(t) \Big|_0^t = \sinh(t) - 0$$

$\Rightarrow s(t) = \sinh(t)$ y al invertir la función:

$$\Rightarrow \boxed{t = \operatorname{arcsinh}(s)} \quad (2) \quad \text{usando (2) sustituyendo en (1)}$$

sabiendo que: $\cosh(t) = \sqrt{1 + \sinh^2(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh}(s) \\ \sqrt{1 + s^2} \end{pmatrix}} \quad (3)$$

c) vector tangente: $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ donde $\vec{r} = \vec{r}(s)$ de (3)

hint: $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Luego:

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}} \quad (4)$$

derivada:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ \frac{d}{ds} \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{(s^2 + 1)^{3/2}} \\ \frac{1}{(s^2 + 1)^{3/2}} - \frac{s^2}{(s^2 + 1)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{(1 + s^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \frac{-s^2 - s^2 + 1}{(s^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \frac{1}{(1 + s^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{1 + s^2} \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{1 + s^2}} \quad (6)$$

vector normal: $\hat{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}}{ds} \stackrel{(5)(6)}{=} \frac{1 + s^2}{(1 + s^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (7)$$

vector binormal: $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ momentos (4) y (7)

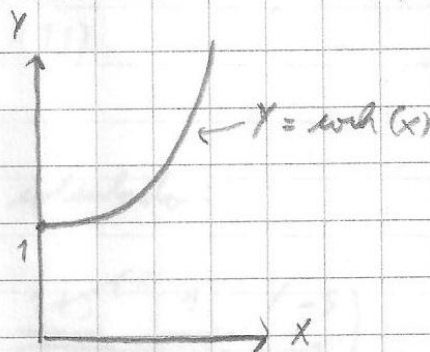
$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s^2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+s^2} \left(\hat{i} \begin{vmatrix} s & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -s \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & s \\ -s & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1+s^2}{1+s^2} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{b} = \hat{k}} \quad (8) \Rightarrow \hat{b} \text{ es simplemente el vector unitario en } z!$$

y $\hat{b}$ es constante en el tiempo $\Rightarrow$ la curva es plana

* esto se condice con una
patenaria en 2D



$$(8) \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} = 0 \quad (9)$$

Torsión: $\tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} \Rightarrow \boxed{\tau = 0} \Rightarrow$ curva plana
ángulo torsión
nula.

d) de coordenadas intrínsecas se sabe que:

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{t} \quad \text{y} \quad \vec{a} = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s}^2 \kappa \hat{n}$$

ya sabemos $s, \kappa, \hat{t}$ y $\hat{n}$ en (2), (4), (6), (7)

velocidad: $\vec{v} = \dot{s} \hat{t} = \sqrt{1+s^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}}$$

y en función de $t = \operatorname{arcsinh}(s)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}} \quad (10)$$

que es lo mismo que haber calculado

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \vec{v}$$

aceleración: $s = \sinh(t) \Rightarrow \dot{s} = \cosh(t) = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{1 + s^2}$

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt} \cosh(t) = \sinh(t) = s \quad (11)$$

$\dot{s}^2 = 1 + s^2$ luego usando lo calculado:

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{t} + k \dot{s}^2 \hat{n} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} + \frac{1+s^2}{\sqrt{1+s^2}} \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} s-s \\ s^2+1 \end{pmatrix} = \frac{1+s^2}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}(s) = \sqrt{1+s^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

y en $s = \sinh t \Rightarrow \vec{a}(t) = \sqrt{1 + \sinh^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\cosh t$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \end{pmatrix}}$$

que es lo mismo que haber calculado:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \end{pmatrix} = \vec{a}$$

P 3/

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}$$

con $t \in [0, 2\pi]$

a) velocidad: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$

$$\Rightarrow \vec{v} = R \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \vec{v} \quad (1)$$

derivado del vector es el vector de los derivados!

módulo de la velocidad: $\|\vec{v}\| = v = R \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \right\|$

$$\Rightarrow v = R \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = R \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t}$$

$$1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\text{hint: } \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} + \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} & \text{if } t \in [0, 2\pi] \\ - \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} & \text{if } t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad (2)$$

y sabemos que: $\vec{v} = \dot{s} \hat{t} \Rightarrow v = \dot{s}$

$$(2) \Rightarrow \dot{s} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3)$$

b) aceleración total o neta (o simplemente aceleración):

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} R \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} R} \quad (4)$$

c) aceleración separada en componentes: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$
 $= a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$

Sabemos que: $\vec{a} = \ddot{s} \hat{t} + \kappa \dot{s}^2 \hat{n}$

Luego identificamos: $a_t = \ddot{s}$ y $a_n = \dot{s}^2 \kappa$

de (3) tenemos $\dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{d}{dt} \dot{s} \stackrel{(3)}{=} R \cos\left(\frac{t}{2}\right) = a_t$

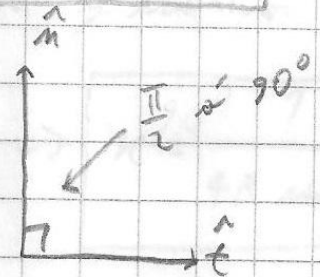
Entonces la componente

tangencial está dada por:

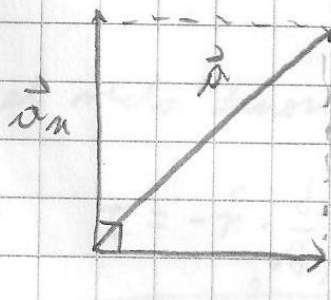
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_t = R \cos\left(\frac{t}{2}\right) \hat{t}} \quad (5)$$

* Como $\hat{t}$ y $\hat{n}$ son ortonormales $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ podemos calcular a_n geométicamente:



pitágoras:



$$\Rightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \quad (6)$$

los módulos a y a_t los sacamos de (4) y (5)

$$\|(4)\| \Rightarrow \|\vec{a}\| = a = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot R \Rightarrow a = R \quad (7)$$

$$\|(5)\| \Rightarrow \|\vec{a}_t\| = a_t = R \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \underbrace{1}_{\|\hat{t}\|} \quad (8)$$

anexo con (7) y (8) en (6) $\Rightarrow a_n = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{R^2 \underbrace{1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}_{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = + R \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

↑ solución porque $t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_n = R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \hat{n}} \quad (9)$$

d) antes dijimos: $a_t = \dot{s}$ y $a_n = \dot{s}^2 \kappa$ y sabemos $\dot{s}$ de (3)

curvatura: $\kappa = \frac{a_n}{\dot{s}^2} \stackrel{(9) \text{ y } (3)}{=} \frac{R \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4R^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{4R \sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$

Torsión: La curva es plana o en $\mathbb{Z}D \Rightarrow$ existe un plano constante

$$\Rightarrow \text{el vector binormal es ile. } \hat{b} = \text{ile} \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} \Leftrightarrow \boxed{\tau = 0}$$

curva $\mathbb{Z}D \Rightarrow$ torsión nula