GUÍA DE EJERCICIOS "GRAVEDAD"

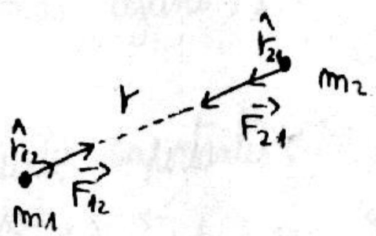
FI-10A-02

Angelo Cabello

Conceptos importantes:

Sean 2 masas $m_1 \wedge m_2$ separadas una distancia r la magnitud de la fuerza con que se atraen es:

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$



vectorialmente $\boxed{\vec{F}_{21} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}}$

el signo (-) es por que la gravedad es una fuerza atractiva

$$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

Energía potencial:

$$W = \int F\, dr = -\Delta U \Rightarrow -\Delta U = \int \frac{G m_1 m_2}{r^2}\, dr = G m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow -\Delta U = -\frac{G m_1 m_2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{G m_1 m_2}{r_1} - \frac{G m_1 m_2}{r_2} = U(r_2) - U(r_1)$$

Haciendo $r_2 = r$ cualquiera, y $r_1 = \infty$ y escogiendo que U sea nula en $r = \infty$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}}$$

Energía total para un cuerpo de masa m que orbita a otro de masa M (con $M >> m$):

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}}$$

con v velocidad tangencial de la partícula

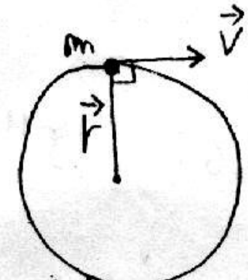
$(v = \omega r)$

Para una órbita circular o elíptica se conserva:

1) Energía total
2) Momentum angular

Momentum angular $= \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$

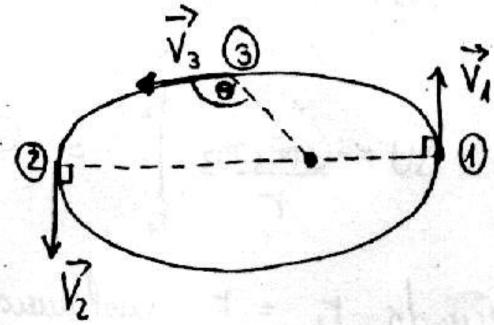
En una órbita circular



como $\vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = (r \cdot v)\hat{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = m r v \hat{k}}$$

En una órbita elíptica:



También se conserva el momentum angular, sin embargo no podemos usar

$m r_i v_i = m r_j v_j$ para cualquier par de puntos i, j.

(en realidad el momentum angular es $\vec{L} = mrv \operatorname{sen}\theta$ pero encontrar θ es mas complicado (o sea $mr_1v_1 \operatorname{sen}\theta_1 = mr_3v_3 \operatorname{sen}\theta_3$))

pero en los puntos ① y ② si se cumple $r \perp v$ y por lo tanto $\boxed{m r_1 V_1 = m r_2 V_2}$

(① y ② se conocen como perigeo (mas cercano) y apogeo (punto mas lejano))

· Algunos · puntos importantes:

- La fuerza de gravedad ejercida por un cascarón esférico hueco es:
  - 0 dentro del cascarón
  - la misma que ejerce una masa puntual con la misma masa del cascarón en el centro de éste.

Leyes de Kepler

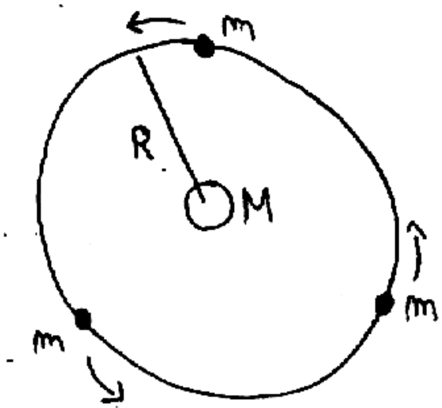
1) Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en un foco
2) La recta que une cualquier planeta con el Sol barre areas iguales en tiempos iguales
3) El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.

$$\frac{T^2}{r^3} = K$$

Ejercicios

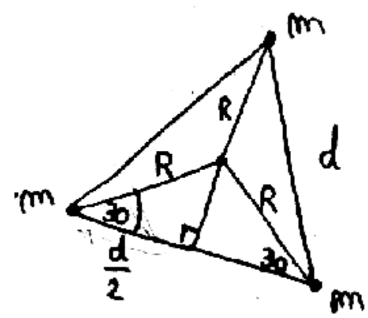
P1/ (Examen año 1999)

3 satélites de masa m orbitan a un planeta de masa M en una trayectoria circular de radio R. Calcular la velocidad con que orbitan si están dispuestos de tal manera que forman un triángulo equilátero y giran en el mismo sentido (no desprecie la fuerza de atracción entre los satélites)



Solución

Primero, calculemos la distancia entre los satélites:



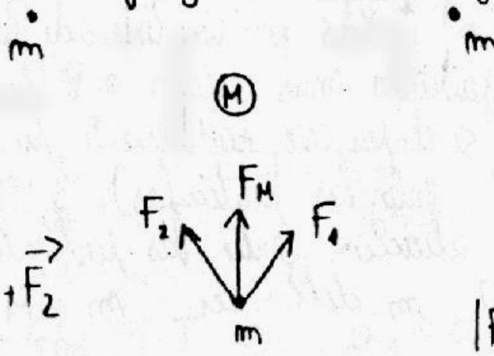
$$\cos 30 = \frac{d}{2}\cdot\frac{1}{R}$$

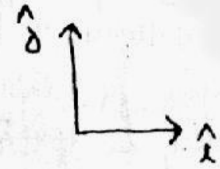
$$\Rightarrow d = 2R\cos 30 = R\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ la fuerza de atracción que ejerce una masa m sobre otra es

$$F = \frac{Gm^2}{3R^2}$$

Calculemos ahora la fuerza neta total ejercida sobre una masa m:





$$\vec{F}_T = \vec{F}_M + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$|F_1| = |F_2| = |F|$$

Descompongamos F:

$$F_x = F \cos 30^\circ$$

$$F_y = F \operatorname{sen} 30^\circ$$

Es claro que las componentes en x de F (F_{1x}, F_{2x}) se anulan.
Entonces queda:

$$F_T = (F_M + 2F_y)\,\hat{j} = (F_M + 2F \operatorname{sen} 30^\circ)\,\hat{j}$$

$$= \left(\frac{GMm}{R^2} + \frac{2Gm^2}{3R^2} \cdot \frac{1}{2}\right)\hat{j}$$

$$= \frac{Gm}{R^2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\hat{j}$$

Esta fuerza está dirigida al centro del planeta.

Los satélites giran en órbitas circulares, por lo tanto la <u>fuerza neta</u> ejercida sobre ellos debe ser <u>igual</u> a la <u>fuerza centrípeta</u>:

$$F_T = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{Gm}{R^2}\left(M + \frac{m}{3}\right) = \frac{mV^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{G}{R}\left(M + \frac{m}{3}\right)}}$$

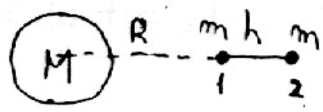
P2/ 2 partículas de igual masa se unen mediante una cuerda ideal de longitud h. El par es atraído por un asteroide de masa M. La distancia entre el asteroide y la partícula más cercana es R con $h << R$

a) Calcule la tensión si el par cae radialmente hacia el asteroide (no considere la atracción entre las partículas)

b) Considere ahora la atracción entre las partículas. Demuestre que para que la tensión sea 0 m debe ser $m = M\left(\frac{h}{R}\right)^3$

Solución:

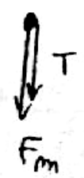
a)



DCL 1

$$\Rightarrow \quad T - F_m = T - \frac{GMm}{R^2} = -m a_1 \qquad (1)$$

DCL 2



$$-T - F_m = -T - \frac{GMm}{(R+h)^2} = -m a_2 \qquad (2)$$

pero $a_1 = a_2$ pues las masas están unidas

$$\Rightarrow (1) = (2) \qquad T - \frac{GMm}{R^2} = -T - \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$2T = GMm\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right)$$

$$T = \frac{GMm}{2}\left(\frac{h^2 + 2Rh}{[R(R+h)]^2}\right)$$

$$= \frac{GMm}{2}\left(\frac{h^2 + 2Rh}{(R(R+h))^2}\right)$$

b) DCL 1

$$T + \frac{Gm^2}{h^2} - \frac{GmM}{R^2} = -ma_1$$

DCL 2

$$-T - \frac{Gm^2}{h^2} - \frac{GmM}{(R+h)^2} = -ma_2$$

Las condiciones son. $T = 0 \quad a_1 = a_2$

$$\Rightarrow \frac{Gm^2}{h^2} - \frac{GMm}{R^2} = -\frac{Gm^2}{h^2} - \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2Gm}{h^2} = GM\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right)$$

$$m = \frac{h^2 M}{2}\left(\frac{-R^2 + R^2 + 2Rh + h^2}{R^2(R+h)^2}\right) = \frac{h^2 M}{2}\left(\frac{2Rh + h^2}{R^2(R+h)^2}\right)$$

$$= \frac{h^3 M}{2R^2}\left(\frac{2R + h}{(R+h)^2}\right) = \frac{h^3 M}{2R^2}\left(\frac{2R\left(1 + \frac{h}{2R}\right)}{R^2\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{h^3}{R^3} M\left(\frac{1 + \frac{h}{2R}}{(1 + h/R)^2}\right)$$

como $\frac{h}{R} \to 0$ pues $h << R$

$$\Rightarrow (1 + h/R)^2 \to 1 + \frac{2h}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{R^3} M\left(\frac{1 + \cancel{h/2R}^{\to 0}}{1 + \cancel{2h/R}^{\to 0}}\right) = \frac{h^3}{R^3} M \cdot (1) = \boxed{M\frac{h^3}{R^3}}$$

P3] Un satélite de masa m gira en una órbita circular de radio R en torno a un planeta de masa $M \gg m$. Determinar:

a) Velocidad V_0 del satélite

b) El satélite es interceptado por un proyectil de masa m que se desplaza hacia el planeta con una velocidad $\vec{V}_1 = -V_1 \hat{r}$. Si el choque es completamente inelástico (el satélite y el proyectil quedan unidos), encuentre la velocidad del satélite-proyectil justo después del choque.

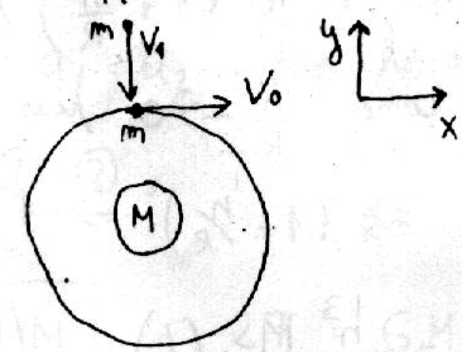
c) La mínima rapidez V_1 que debe tener el proyectil para que el cuerpo satélite-proyectil logre escapar del campo gravitacional del planeta

Solución:

a) Ya vimos anteriormente que en un cuerpo que orbita circularmente un planeta la fuerza de gravedad ejercida debe ser igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{R^2} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{GM}{R} = V^2 = V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

b)



Por conservación de momentum

$$\vec{p}_i = \vec{p}_F$$

$$\vec{p}_i = mV_0\,\hat{\imath} + mV_1\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{p}_F = 2mV\cos\alpha\,\hat{\imath} + 2mV\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow mV_0 = 2mV\cos\alpha \Rightarrow V_0/2 = V\cos\alpha$$
$$mV_1 = 2mV\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow V_1/2 = V\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow V^2\cos^2\alpha = \frac{V_0^2}{4} \quad \wedge \quad V^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{V_1^2}{4}$$

sumando:

$$V^2\cos^2\alpha + V^2\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{V_0^2}{4} + \frac{V_1^2}{4}$$

$$V^2\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) = \frac{V_0^2 + V_1^2}{4}$$

$$V = \sqrt{\frac{V_0^2+V_1^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{V_0^2+V_1^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R} + V_1^2}$$

c) Para que escape al infinito debemos imponer que la velocidad $\to 0$ cuando $r \to \infty$ la energía en ese instante sería:

$$E(r) \Rightarrow E(\infty) = \frac{1}{2} m \cancel{V^2}^{\to 0} - \frac{GMm}{\cancel{r}}^{\to 0} = 0$$

y como la energía se conserva, debemos imponer entonces $E = 0$ para obtener la velocidad mínima de escape:

$$E = \frac{1}{2}(2m)V^2 - \frac{GM(2m)}{R} = 0$$

$$mV^2 = \frac{GM2m}{R} \Rightarrow V^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{GM}{R} + V_1^2\right) = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \frac{GM}{R} + V_1^2 = \frac{8GM}{R}$$

$$\Rightarrow V_1^2 = \frac{7GM}{R} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{7GM}{R}}$$

P4/ Un satelite gira alrededor de la Tierra en trayectoria circular con radio $2R$. con R radio de la Tierra.

a) Encuentre el periodo del satelite

b) Con la ayuda de un cohete, el satélite se acelera en forma instantanea de modo que la velocidad se incrementa de V_0 a αV_0 con $\alpha > 1$ siendo la nueva trayectoria elypsoidal Encuentre la distancia del apogeo del Satelite en funcion de α y R.

c) Calcule α minimo para que el satélite escape hacia el infinito

Solución:

a) Ya sabemos que: $\dfrac{GMm}{4R^2} = m\dfrac{V^2}{2R} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{GM}{2R}} = V$

$$w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} \quad \text{con} \quad w = \frac{V}{2R}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot 2R\sqrt{\frac{2R}{GM}} = 4\pi\sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$$

b) - Conservacion de momentum angular
- Conservaccion de energía

Momentum: $\vec{L}_i = 2Rm\alpha V$

$\vec{L}_F = R_a m V_a$

R_a = distancia del apogeo
V_a = velocidad Tangencial en el apogeo.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_F \Rightarrow 2Rm\alpha V = R_a m V_a$$

$$V_a = \frac{2R}{R_a}\alpha V$$

Conservacion de energia:

$$E_i = \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2 - \frac{GMm}{2R} \qquad E_F = \frac{1}{2} m V_a^2 - \frac{GMm}{R_a}$$

$$E_i = E_F \Rightarrow \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m V_a^2 - \frac{GMm}{R_a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \alpha^2 \frac{GM}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m \frac{4R^2 \alpha^2 V^2}{R_a^2} - \frac{GMm}{R_a}$$

$$\frac{GM}{2R}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) = 2R^2\alpha^2 \frac{GM}{2R\,R_a^2} - \frac{GM}{R_a}$$

$$(\alpha^2 - 2) = \frac{4R^2\alpha^2}{R_a^2} - \frac{4R}{R_a}$$

$$R_a^2(\alpha^2 - 2) = 4R^2\alpha^2 - 4R R_a$$

$$R_a^2(\alpha^2-2) + R_a 4R - 4R^2\alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_a = \frac{-4R + \sqrt{16R^2 + 16R^2\alpha^2(\alpha^2-2)}}{2(\alpha^2-2)}$$

$$R_a = \frac{-4R + 4R\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2}}{2(\alpha^2-2)} = \frac{4R\left(-1 + \sqrt{(1 \mp \alpha^2)^2}\right)}{2(\alpha^2-2)}$$

$$R_a = \frac{4R\left(-1 + |1 \mp \alpha^2|\right)}{2(\alpha^2-2)} \Rightarrow R_a \to 2R$$

$$\to \frac{2R\alpha^2}{2-\alpha^2}$$

$\Rightarrow$ La distancia del apogeo es $2R\left(\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}\right)$

c) Para que se vaya al infinito: dist apogeo $\to \infty$

$$2R\left(\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}\right) \to \infty \quad \Rightarrow \quad 2-\alpha^2 \to 0$$

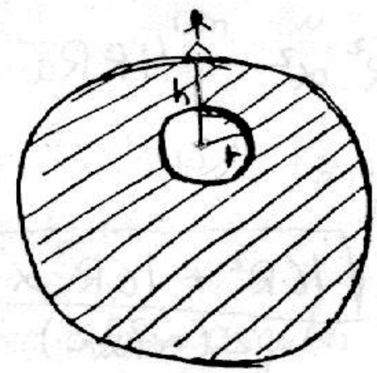
$$\alpha^2 \to 2$$

$$\alpha \to \sqrt{2}$$

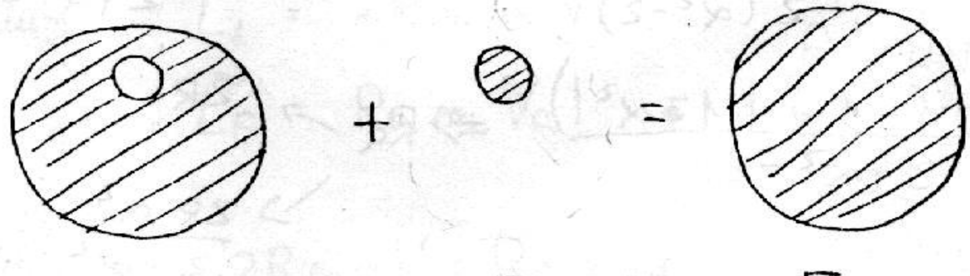
$\Rightarrow$ Para $\alpha > \sqrt{2}$ el satélite se va al infinito.

P5/ Calcule la gravedad ejercida sobre una persona de masa m parada sobre la superficie terrestre si a la Tierra se le hace una cavidad esférica de radio r a una profundidad h (Ind: Considere a la tierra con una densidad uniforme ρ)

Sol: Tenemos:

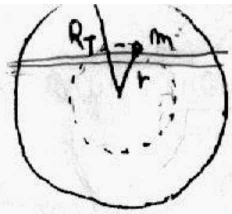


Se aplica el principio de "superposición":



$$F_A + F_B = F_T$$

$$\Rightarrow F_A = F_T - F_B$$



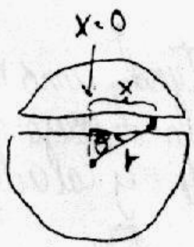
Sabemos que la fuerza de atracción será $\dfrac{-GMm}{r^2}$

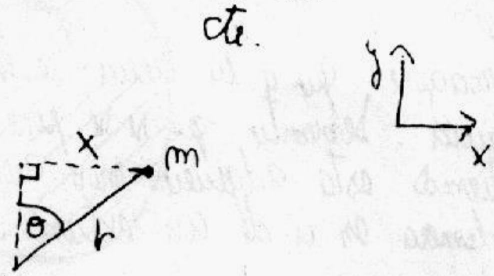
con M la masa de la tierra entre $R=0$ y $R=r$

pues sabemos que $M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho$ y $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ (ρ = densidad)

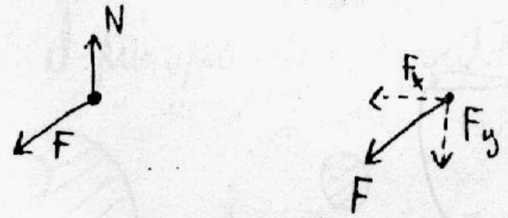
$$\Rightarrow \frac{M}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho} = \frac{r^3}{R_T^3} \Rightarrow M = M_T \frac{r^3}{R_T^3}$$

$$\Rightarrow \text{fuerza es } -\frac{G M_T r^3 m}{R_T^3 r^2} = \underbrace{-\frac{G M_T m}{R_T^3}}_{\text{cte.}} r$$





DCL



$F_x = F \operatorname{sen}\theta$
$F_y = F \cos\theta$

El cuerpo se mueve solo a lo largo del eje X $\Rightarrow$

$$N = F_y \;\wedge\; F_x = ma = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{G M_T m}{R_T^3} r \operatorname{sen}\theta = m\ddot{x} \quad \text{pues } r \operatorname{sen}\theta = x$$

$$\Rightarrow -\frac{GM_T m}{R_T^3} x = m\ddot{x}$$

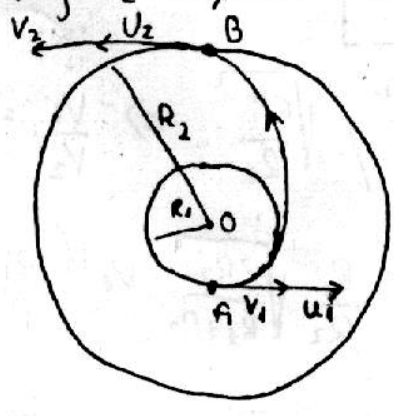
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{GM_T}{R_T^3}}_{\omega^2} x = 0}$$

El tiempo para ir de un extremo a otro será la mitad del periodo:

$$t = \frac{T}{2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \boxed{\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}}$$

P7/ Una nave que se encuentra en una órbita circular de radio R_1 debe ser llevada a una órbita circular de radio $R_2 > R_1$. Para que pueda abandonar la primera órbita la nave debe acelerar desde la velocidad v_1 que tiene en la 1° órbita hasta una velocidad u_1 que corresponde a la vel. en el perigeo de una órbita elíptica cuyo apogeo está en B, a la dist R_2 del centro O. Al alcanzar el punto B (apogeo) donde pasa con una velocidad u_2 debe acelerar nuevamente para alcanzar la velocidad v_2 correspondiente a una órbita circular de radio R_2. Calcular u_1 y u_2 en función de v_1 y v_2 respectivamente.



$$F_T = \frac{G M_T m}{R_T^2} \qquad F_B = \frac{G m_1 m}{h^2}$$

pues $m_1 = V_1 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\Rightarrow F_B = \frac{G\, 4 \pi r^3 \rho\, m}{3 h^2}$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{G M_T m}{R_T^2} - \frac{G\, 4\pi r^3 \rho\, m}{3 h^2}$$

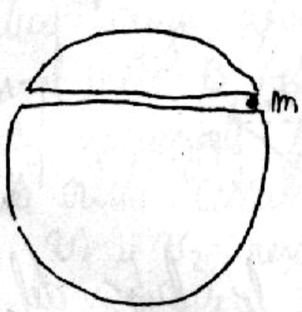
utilizando $r = 500$ m. $\quad \rho = 5{,}5\ gr/cm^3$
$h = 1000$ m

$$\left(9{,}8 = \frac{G M_T}{R_T^2}\right)$$

$$\Rightarrow F_A = 9{,}8\, m - 0{,}000192\, m$$
$$= 9{,}799808\, m$$

P6/ Imagine que a la tierra se le hace un tunel como se indica en la figura. Demuestre que si se pone una partícula de masa m en uno de sus extremos esta adquiere mov. armonico simple y calcule el tiempo que se demora en ir de un extremo a otro.

Fig



Sol/ Primero calculamos la fuerza de gravedad ejercida por la tierra en el interior de esta.

Solución: Calculando v_1 en la orbita circular R_1:

$$-\frac{GMm}{R_1^2} = -\frac{mV_1^2}{R_1} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \quad (1)$$

Analogamente $V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}$ (2)

En la orbita elyptica $\vec{L} = cte$

En A y B se tiene $mR_1 u_1 = mR_2 u_2 \Rightarrow \boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_2}{R_1}}$ (3)

De la cons. de energía.

$$E = \underbrace{-\frac{GM\cancel{m}}{R_1} + \frac{1}{2}\cancel{m}u_1^2}_{E_A} = \underbrace{-\frac{GM\cancel{m}}{R_2} + \frac{1}{2}\cancel{m}u_2^2}_{E_B} = cte \quad (4)$$

De (1) $\frac{GM}{R_1} = v_1^2$ y (3) $u_2 = \frac{R_1}{R_2}u_1$ y además $\frac{GM}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}V_1^2$

en (4)

$$\Rightarrow u_1^2(R_1^2 - R_2^2) = 2R_2(R_1 - R_2)V_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}\,V_1} \qquad u_1 > V_1$$

De 1) y 2) $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \Big/ \sqrt{\frac{GM}{R_2}} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$

y como $u_2 = \frac{R_1}{R_2}u_1 = \frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}\,V_1 = \frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,V_2$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\, V_2} \qquad u_2 < V_2$$

Eso sería todo, el ejercicio del Miércoles es sobre esta materia, no se conformen con estos problemas y ejercítense harto.

¡¡Buena suerte!!