P3)

a) pdq: epi(f) convexo $\Rightarrow$ f convexa.

Para todo par de elementos en epi(f), la combinación convexa pertenece a epi(f).

$\Rightarrow \forall (x, \alpha), (y, \beta) \in epi(f)$.

$\Rightarrow (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in epi(f)$.

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$. (*)

Como $(x, f(x))$ e $(y, f(y)) \in epi(f)$, de asterisco se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

$\Leftarrow$) f convexa $\Rightarrow$ epi(f) convexa.

Sea $(x, \alpha), (x, \beta) \in epi(f)$, i.e., $f(x) \leq \alpha \wedge f(y) \leq \beta$. Debemos probar que $(\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in epi(f)$. En efecto, como f es convexa

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Como $f(x) \leq \alpha \wedge f(y) \leq \beta$.

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$

$\Rightarrow (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in epi(f)$.

b) (i) Calculemos el gradiente.

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2} \\ 4x_2 - x_1 + e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}.$$

Así, la condición de optimalidad es

$$2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2} = 0$$
$$4x_2 - x_1 + e^{x_1+x_2} = 0.$$

Notemos que $z\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$

$$= x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$$

Como los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ son positivos $x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$ es convexa; igual que $-2x_1$, que es lineal; y que la exponencial.

$\Rightarrow$ z es suma de convexas.
(o probar que $\nabla^2 z$ es positiva)
$\Rightarrow$ Las condiciones son suficientes.

ii) Notemos que que

$$\nabla z(0,0) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 - 0 - 2 + e^{0+0} \\ 4\cdot 0 - 0 + e^{0+0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{No es óptimo.}$$

Consideremos $d = -\nabla z(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Debemos resolver

$$\min \; z((0,0) + \lambda d).$$

$$\Leftrightarrow \min \; z(\lambda d)$$

$$\min \; \lambda^2 - \lambda \cdot (-\lambda) + 2\lambda^2 - 2\lambda + e^{\lambda - \lambda}$$

$$\min \; 3\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 4\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

El mínimo está en $\frac{d \, z(\lambda d)}{d\lambda}$, pues $z(\lambda d)$ es convexa también.

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$