MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Simón Pigaz- Valentín Retamal.
Fecha: 29 de Diciembre 2014 .

Pauta Control 3

P1 Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Decimos que f satisface la Ecuación de Onda si se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

donde $c>0$ es constante. El objetivo es mostrar las soluciones que tiene esta EDP. Para ello,

i) Considere $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\varphi(u(x,t),v(x,t))=f(x,t)$, donde

$$\begin{aligned} u &= x+ct \\ v &= x-ct \end{aligned}$$

Muestre que si f satisface la Ecuación de Onda entonces

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}=0$$

ii) Halle la solución general para φ y deduzca la solución general para f. Escriba una solución particular para f que no sea polinomial.

iii) Considere que además se cuenta con las condiciones iniciales dadas por

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) &= h(x) \end{aligned}$$

Encuentre una expresión para f.

iv) Dé la solución al problema de valor inicial

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \\ f(x,0) = \sin(x^x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = x \end{cases}$$

Sol:

i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \qquad (\varphi\in\mathcal{C}^2) \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial\varphi}{\partial u}-c\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0 \implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0 \quad & \xrightarrow{\int du} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \psi(v) \\ & \xrightarrow{\int dv} \quad \varphi(u,v) = \textstyle\int \psi(v)dv + \phi(u) \\ & \longrightarrow \quad \varphi(u,v) = \Psi(v) + \phi(u) \qquad\qquad (\Psi(v) := \textstyle\int \psi(v)dv) \\ & \longrightarrow \quad f(x,t) = \Psi(x-ct) + \phi(x+ct) \end{aligned}$$

iii)

$$f(x,0) = \Psi(x) + \phi(x) = g(x) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -c\Psi'(x) + c\phi'(x) = h(x) \implies c\phi(x) - c\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} h(s)ds \tag{2}$$

$$c(1)+(2) \implies 2c\varphi(x) = cg(x) + \int_{-\infty}^{x} h(s)ds \implies \varphi(x) = \frac{1}{2c}\left(cg(x) + \int_{-\infty}^{x} h(s)ds\right)$$

$$c(1)-(2) \implies 2c\Psi(x) = cg(x) - \int_{-\infty}^{x} h(s)ds \implies \Psi(x) = \frac{1}{2c}\left(cg(x) - \int_{-\infty}^{x} h(s)ds\right)$$

$$\text{Así, } f(x,y) = \varphi(x+ct) + \Psi(x-ct) == \frac{1}{2c}\left(cg(x+ct) - cg(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds\right)$$

iv) $g(x) = \sin(x^x), \quad h(x) = x$

$$\begin{aligned} \implies f(x,t) &= \frac{1}{2c}\left(c\sin\left([x+ct]^{x+ct}\right) - c\sin\left([x-ct]^{x-ct}\right) + \int_{x-ct}^{x+ct} sds\right) \\ &= \frac{1}{2c}\left(c\sin\left([x+ct]^{x+ct}\right) - c\sin\left([x-ct]^{x-ct}\right) + \frac{1}{2}\left([x+ct]^2 - [x-ct]^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2c}\left(c\sin\left([x+ct]^{x+ct}\right) - c\sin\left([x-ct]^{x-ct}\right) + 2xct\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left([x+ct]^{x+ct}\right) - \frac{1}{2}\sin\left([x-ct]^{x-ct}\right) + xt \end{aligned}$$

P2 i) Determine los máximos, mínimos y puntos silla de

a) $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b > 0$ constantes.

b) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en $[0,1] \times [0,1]$.

ii) Considere las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2y + \sin(xyz) + z^2 &= 1 \\ e^{yz} + xz &= 1 \end{aligned}$$

a) Pruebe que se pueden definir funciones implícitas $y(x)$, $z(x)$ en torno al punto $(x,y,z) = (1,1,0)$.

b) Considere la curva $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Calcule la derivada direccional de g en $(1,1,0)$ en la dirección del vector tangente a α en $x = 1$.

Sol:

i) a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2axe^{-(x^2+y^2)} - 2x(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)} \\ 2bye^{-(x^2+y^2)} - 2y(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^{-(x^2+y^2)}(a-(ax^2+by^2)) \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(b-(ax^2+by^2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(a-(ax^2+by^2)) \\ y(b-(ax^2+by^2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad : \quad \longrightarrow \quad (0,0)$
- $x = 0 \quad \wedge \quad b - by^2 = 0 \quad : \quad \implies y = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad (0,1), (0,-1)$
- $y = 0 \quad \wedge \quad a - ax^2 = 0 \quad : \quad \implies x = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad (1,0), (-1,0)$
- $a - ax^2 - by^2 = 0 \quad \wedge \quad b - ax^2 - by^2 = 0 \quad :$ ∘ si $a \neq b \longrightarrow$ No hay solución
  ∘ si $a = b \longrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(a + 2ax^4 - 5ax^2 + 2bx^2y^2 - by^2) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 - a + by^2 - b) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 - a + by^2 - b) & 2e^{-(x^2+y^2)}(b + 2by^4 - 5by^2 + 2ax^2y^2 - ax^2) \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} > 0 \implies (0,0) \text{ es mínimo}$$

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1}(a-b) & 0 \\ 0 & -4be^{-1} \end{pmatrix} = H_f(0,-1) \implies$$

- $a \leq b :$ máximo
- $a > b :$ punto silla

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -4ae^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1}(b-a) \end{pmatrix} = H_f(-1,0) \implies$$

- $b \leq a :$ máximo
- $b > a :$ punto silla

b)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - 3x^2y - y^3 \\ x - 3xy^2 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1 - 3x^2 - y^2) \\ x(1 - 3y^2 - x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad (0,0)$
- $x = 0 \quad \wedge \quad y = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad (0,1), (0,-1)$
- $x = \pm 1 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad (1,0), (-1,0)$

$$\circ \begin{array}{c} 1-3x^2-y^2=0 \\ 1-3y^2-x^2=0 \end{array} \implies \begin{bmatrix} 3-9x^2-3y^2=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{bmatrix} \implies 2-8x^2=0 \implies x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1-3x^2-y^2=0 \\ 3-3x^2-9y^2=0 \end{bmatrix} \implies 2-8y^2=0 \implies y=\pm\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow (\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-3y^2 \\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{punto silla}$$

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = H_f(0,-1) = H_f(1,0) = H_f(-1,0) \implies \text{punto silla}$$

$$H_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = H_f(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \implies \text{máximo}$$

$$H_f(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = H_f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \implies \text{mínimo}$$

Además en $\partial([0,1]\times[0,1]) = [0,1]\times 0 \cup [0,1]\times 1 \cup 0\times[0,1] \cup 1\times[0,1]$ se tiene que:

$$\circ[0,1]\times\{0\} \quad f(x,y)=0$$

$$\circ[0,1]\times\{1\} \quad f(x,y)=-x^3 \implies \tfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \implies (0,1)$$

$$\circ\{0\}\times[0,1] \quad f(x,y)=0$$

$$\circ\{1\}\times[0,1] \quad f(x,y)=-y^3 \implies \tfrac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y=0 \wedge \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \implies (1,0)$$

ii) a) Primero notamos que se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= \quad x^2y + \sin(xyz) + z^2 - 1 &= 0 \\ F_2(x,y,z) &= \quad e^{yz} + xz - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, también vemos que el punto $(1,1,0)$ satisface el sistema.

$$\begin{aligned} F_1(1,1,0) &= \quad (1)^2(1) + \sin(0) + (0)^2 - 1 &= 0 \\ F_2(1,1,0) &= \quad e^0 + 0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + xz\cos(xyz) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z + xy\cos(xyz) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = ze^{yz} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = ye^{yz} + x \end{vmatrix}$$

$$\implies \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(1,1,0) = 1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(1,1,0) = 1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(1,1,0) = 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(1,1,0) = 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego, el sistema define las funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$.

b) Para $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ en $x = 1$, podremos calcular el vector tangente ya que el Teorema de la Función Implícita nos proporciona las derivadas de las funciones. Entonces,

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

donde,

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

El vector tangente a $F(x)$ puede calcularse mediante la fórmula $F'(x) = \nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z)$. ya que el vector $\nabla F_1(x,y,z)$ es ortogonal a la superficie de nivel $F_1(x,y,z) = 0$ y $\nabla F_2(x,y,z)$ es ortogonal a la superficie de nivel $F_2(x,y,z) = 0$. Por tanto, el vector $\nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z)$ es paralelo a la tangente a la curva intersección de ambas superficies.

$$\nabla F_1(x,y,z) = (2xy + yz\cos(xyz), x^2 + xz\cos(xyz), 2z + xy\cos(xyz))$$

$$\nabla F_2(x,y,z) = (z, ze^{yz}, ye^{yz} + x)$$

$$\implies \alpha(x) = \nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{1_y} f_{2_z} - f_{2_y} f_{1_z} \\ -(f_{1_x} f_{2_z} - f_{2_x} f_{1_z}) \\ f_{1_x} f_{2_y} - f_{2_x} f_{1_y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x^2+xz\cos(xyz))(ye^{yz}+x)-(ze^{yz})(2z+xy\cos(xyz)) \\ -((2xy+yz\cos(xyz))(ye^{yz}+x)-(z)(2z+xy\cos(xyz))) \\ (2xy+yz\cos(xyz))(ze^{yz})-(z)(ze^{yz}) \end{pmatrix}$$

$$x=1 \implies \alpha(1)=\nabla F_1(1,1,0)\times\nabla F_2(1,1,0)=\begin{pmatrix} (1+0)(1+1)-(0)(0+1) \\ -((2+0)(1+1)-(0)(0+1)) \\ (2+0)(0)-(0)(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego la derivada direccional de g es:

$$g'((1,1,0);\alpha(1))=\frac{\langle\nabla g(1,1,0),\alpha(1)\rangle}{\|\alpha(1)\|}=\frac{\langle(2,2,0)^t,(2,-4,0)^t\rangle}{2\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

P3 i) Considere la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $\mu\in\mathbb{R}$ y $\sigma>0$. Sea $\{x_1,\ldots,x_n\}$ un conjunto de observaciones, donde $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$. Se define la función

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

a) Encuentre $L(\mu,\sigma)$ explícitamente.

b) Resuelva el problema $\max\limits_{\mu,\sigma}\ln(L(\mu,\sigma))$. Note que $\hat{\mu},\hat{\sigma}$ que maximizan $\ln(L(\mu,\sigma))$ sólo dependen de $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Debe mostrar rigurosamente que el punto encontrado es un máximo.

ii) Determine si existen máximos y/o mínimos para las siguientes funciones en los dominios indicados.

a) $f(x,y)=\dfrac{(1-x^2-y^2)^{1/2}}{x^2+y^2}$, sobre $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ (x,y)\neq(0,0)\right\}$

b) $f(x,y)=\dfrac{x(1-x^2-y^2)^{1/2}}{y}$, sobre $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ y>0,\ (x,y)\neq(0,0)\right\}$

Sol:

i) a)

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}$$

b)

$$\begin{aligned} \ln(L(\mu,\sigma)) &= -\ln((2\pi)^{\frac{n}{2}})-n\ln(\sigma)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\ \implies \nabla ln(L(\mu,\sigma)) &= \left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\mu-x_i),\quad -\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)=(0,0) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}-x_i) &= 0 \\ n\hat{\sigma^2}-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x} \\ \hat{\sigma} &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$H_{\ln(L)}(\mu,\sigma) = \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & \dfrac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i) \\ \dfrac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i) & \dfrac{n}{\sigma^2} - \dfrac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{pmatrix}$$

Evaluando en el punto obtenido

$$H_{\ln(L)}(\hat{\mu},\hat{\sigma}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \end{pmatrix} < 0$$

$$\therefore (\hat{\mu},\hat{\sigma}) \text{ es máximo.}$$

ii) a)

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = \dfrac{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} & & f(r,\theta) = \dfrac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r^2} \\ \text{s.a.} \quad x^2+y^2 \leq 1 & \equiv & \text{s.a.} \quad r \leq 1 \\ \quad (x,y) \neq (0,0) & & \quad r \neq 0 \end{array}$$

La región la separamos en interior ($0 < r < 1$) y frontera ($r = 0$, $r = 1$)

Frontera:

$$r = 0: \quad \lim_{r\to 0} \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r^2} = \infty \qquad \therefore \text{ se dispara en el origen}$$

$$r = 1: \quad f(1,\theta) = 0$$

Interior:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{3r^2-2}{r^3(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \iff \hat{r} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{6r^4-11r^2+6}{r^4(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\hat{r},\theta) = -\frac{477}{2}\sqrt{3} < 0$$

$\therefore f$ tiene un máximo en $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \equiv x^2+y^2 = \frac{2}{3}$ y tiene un mínimo en $r = 1 \equiv x^2+y^2 = 1$.

b)

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = \dfrac{x(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{y} & & f(r,\theta) = \text{cotan}(\theta)(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{s.a.} \quad x^2+y^2 \leq 1 & \equiv & \text{s.a.} \quad 0 < r \leq 1 \\ \quad y > 1 & & \quad 0 < \theta < \pi \end{array}$$

Estudiamos primero $r = 1$, $0 < \theta < \pi$: $f(r,\theta) = 0$

Estudiamos el interior: $\nabla f(r,\theta) = \left(-\text{cotan}(\theta)\dfrac{r}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad -\dfrac{1}{\sin^2(\theta)}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\right) = (0,0)$

$$\iff \quad -\text{cotan}(\theta) = 0 \quad \wedge \quad 1-r^2 = 0$$

$$\iff \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad r = \pm 1 \longleftarrow \text{ Pero } r < 1$$

$\therefore$ No tiene puntos críticos en el interior.
Por lo tanto, como la función tiende a infinito y a menos infinito con $y \to 0$, $x \in [-1, 1]$ e $y = 0$ no es factible, no existen máximos ni mínimos para el problema.