MA2001-1. Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Simón Piga - Valentín Retamal
Ayudante: Obed Ulloa
Fecha: 19 de Enero de 2015

Control 3

P1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Decimos que f satisface la Ecuación de Onda si se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

donde $c > 0$ es constante. El objetivo es mostrar las soluciones que tiene esta EDP. Para ello,

i) Considere $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u(x,t), v(x,t)) = f(x,t)$, donde

$$\begin{aligned} u &= x + ct \\ v &= x - ct \end{aligned}$$

Muestre que si f satisface la Ecuación de Onda entonces

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0$$

ii) Halle la solución general para φ y deduzca la solución general para f. Escriba una solución particular para f que no sea polinomial.

iii) Considere que además se cuenta con las condiciones iniciales dadas por

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) &= h(x) \end{aligned}$$

Encuentre una expresión para f.

iv) Dé la solución al problema de valor inicial

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \\ f(x,0) = \sin(x^x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = x \end{cases}$$

P2 i) Determine los máximos, mínimos y puntos silla de

a) $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b > 0$ constantes.

b) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en $[0,1] \times [0,1]$.

ii) Considere las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2y + \sin(xyz) + z^2 &= 1 \\ e^{yz} + xz &= 1 \end{aligned}$$

a) Pruebe que se pueden definir funciones implícitas $y(x)$, $z(x)$ en torno al punto $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

b) Considere la curva $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule la derivada direccional de g en $(1, 1, 0)$ en la dirección del vector tangente a α en $x = 1$.

P3 i) Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de observaciones, donde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Se define la función

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

a) Encuentre $L(\mu, \sigma)$ explícitamente.

b) Resuelva el problema $\max\limits_{\mu,\sigma} \ln(L(\mu, \sigma))$. Note que $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ que maximizan $\ln(L(\mu, \sigma))$ sólo dependen de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Debe mostrar rigurosamente que el punto encontrado es un máximo.

ii) Determine si existen máximos y/o mínimos para las siguientes funciones en los dominios indicados.

a) $f(x, y) = \dfrac{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}}{x^2 + y^2}$, sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ (x, y) \neq (0, 0)\}$

b) $f(x, y) = \dfrac{x(1 - x^2 - y^2)^{1/2}}{y}$, sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y > 0, \ (x, y) \neq (0, 0)\}$