

Capítulo 1

Optimización

1.1. Introducción

Supongamos por un momento que trabajamos en una empresa que maneja un gran capital, que tiene a su haber varios empleados y cuya producción podríamos considerar grande. Nuestro puesto es el de Administrador, por lo que debemos saber manejar el dinero de la empresa de manera conveniente. Por lo mismo, es prioridad que podamos encontrar la forma de obtener la mayor utilidad posible, manteniendo nuestro capital intacto y con libertad de contratar o despedir empleados. Por otro lado, la encargada de Recursos Humanos tiene por misión minimizar los gastos de la empresa, bajo la condición de no alterar la cantidad de trabajadores. Estos dos trabajos involucran problemas distintos en cuanto a su formulación, pero se enmarcan dentro de la misma disciplina matemática: la Optimización.

Podríamos considerar otro problema, aplicado fuera del mundo financiero. Por ejemplo, la Dirección General de Aeronáutica Civil quiere implementar un plan de diseño de naves para uso comercial dentro del territorio nacional. Para ello, una de las dificultades más grandes que se les presenta es que Chile no tiene grandes estudios en el área, por lo que deben realizar exhaustivos modelos computacionales. En particular, las alas de los aviones deben ser capaces de mantener la sustentación del avión al mismo tiempo que son aerodinámicas, es decir, ofrecen menor resistencia cuando se encuentran en movimiento. Dentro de las variables a considerar, podemos contar el grosor del ala, el ángulo de incidencia, el largo y la altura a la que se ubica con respecto al fuselaje.

Claramente, éste también es un problema de optimización, y es fácil ver que difiere del anterior en un aspecto clave: el conjunto de empleados y de cantidades de dinero en una empresa son discretos, mientras que el conjunto de anchos, largos, alturas y ángulos son continuos. En este curso abordaremos problemas en el contexto de conjuntos continuos, pues el objetivo es utilizar la teoría aprendida con anterioridad. Por otro lado, aunque en principio suene contraintuitivo, los problemas discretos tienen un nivel de dificultad tal, que muchos resultados aceptados hoy en día son parciales, es decir, no podemos llamarlos teoremas o lemas, sino conjeturas. Famosos son el problema del mapa de cuatro colores y el del vendedor viajero.

1.2. Planteamiento del problema

Construiremos la definición de un problema de optimización a partir de conceptos simples que repasaremos en esta sección. La idea de plantear un problema, es condensar en su mínima expresión todas las variables que lo afectan.

Definición 1: Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera. Intentamos encontrar $\bar{x} \in Q$ tal que, para todo $x \in Q$, se tenga $f(\bar{x}) \leq f(x)$. El problema asociado a encontrar dicho $\bar{x}$ es denominado problema de minimización. Además, si buscamos $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) \geq f(x)$ para todo $x \in Q$, el problema asociado a encontrar dicho $\bar{x}$ es denominado problema de maximización. Diremos además que f es la función objetivo del problema.

Dado el conjunto Q , decimos que buscamos resolver el problema de minimización o maximización, sujeto a (*s.a.*) que la variable esté en Q . A Q se le llama el conjunto restricción o de restricciones.

Notación: Cuando tengamos un problema de minimización o maximización donde la función objetivo sea f y sujeto a

que las variables estén en cierta restricción Q , escribiremos el problema como

$$\begin{array}{ll} (P) & \text{mín / máx } f(x) \\ \text{s.a.} & x \in Q \end{array}$$

donde s.a. abrevia *sujeto a* (en ocasiones, se usa s.t., abreviación de *subject to*).

¿Qué forma tiene Q ? ¿A qué nos referimos con que la solución esté sujeta a una restricción?

Notemos que Q , en principio, es un conjunto cualquiera. Luego, que x pertenezca a Q significa que x satisface la propiedad que define a Q como conjunto. Para efectos del curso, consideraremos un par de casos muy particulares para definir el conjunto Q .

Para dar un ejemplo breve, recurrimos al caso en que queremos minimizar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, sujeto a que la variable esté en el intervalo $[1, 2]$. Esto quiere decir que queremos encontrar el menor valor que alcanza f cuando x varía entre 1 y 2. Por un lado, el interés en este tipo de problemas recae en que no podemos aplicar una técnica conocida para funciones de una variable, en que buscamos los x tales que $f'(x) = 0$, y es porque $0 \notin [1, 2]$, que sería el mínimo de f en todo su dominio. Por otro lado, notemos que $Q = [1, 2]$ y que esto se puede escribir como $Q = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a, x \leq b\}$.

Un ejemplo más interesante podría ser aquel en que queremos maximizar $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x + y$, sujeto a que (x, y) se encuentre sobre el círculo unitario centrado en el origen. En ese caso, el conjunto de restricciones es $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Finalmente, podemos considerar minimizar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cualquiera, sujeto a que la primera variable sea nula, que la segunda sea entera, que la tercera con la cuarta sumen 2 y que las demás no estén restringidas. Podemos escribir Q como $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 + x_4 = 2, x_i \in \mathbb{R}, i \in \{5, \dots, n\}\}$.

Definición 2: Dado un problema de minimización o maximización con función objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y conjunto restricción Q , llamaremos región factible al conjunto $\text{dom}(f) \cap Q$.

Cuando llamamos región factible al conjunto de restricciones, queremos enfatizar el hecho de que es “el conjunto de valores que tiene sentido considerar”.

Ejemplo: Consideremos la función polar $f(r, \theta) = \sqrt{1 - 2r}$, la cual queremos minimizar o maximizar.

- Si tenemos que el problema está sujeto a que $(r, \theta) \in Q_1 = [0, 1] \times [0, 2\pi)$ (notemos que Q_1 es la bola unitaria cerrada, con respecto a la norma euclidiana), tenemos que el conjunto factible es $\text{dom}(f) \cap Q_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi)$.
- Podemos escoger otra restricción $Q_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$, en cuyo caso Q_2 coincide con la región factible.
- Podemos escoger la restricción $Q_3 = \{1\} \times [0, 2\pi)$, y diremos que el problema está sujeto a que la solución se encuentre en la circunferencia de radio 1. Notemos que $\text{dom}(f) \cap Q_3 = \emptyset$, luego la región factible es vacía. Decimos en este caso que el problema es infactible, puesto que no podemos hallar una solución vía un punto que pertenezca al dominio y que satisfaga la restricción.

Obs.: Si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, sabemos por el teorema de Weierstrass que tanto el problema de minimización como el de maximización tienen solución.

Hagamos un pequeño análisis de lo que hemos hecho. Buscamos soluciones a un determinado problema, el cual tiene ciertas restricciones. Tanto la función como el conjunto restricción están dados explícitamente en el problema. Las restricciones pueden ser de desigualdad (como en el primer y segundo ejemplo) o de igualdad (como en el tercer ejemplo), y pueden presentarse sobre todas las variables o sobre sólo algunas. En lo que sigue de capítulo, intentaremos dar herramientas que nos permitan determinar una solución a un problema de optimización de una función continua, sujeto a restricciones. Veamos primero qué formas nos interesa que tenga Q en este contexto.

Definición 4: Sea el problema $\begin{array}{ll} (P) & \text{mín } f(x) \\ \text{s.a.} & x \in Q \end{array}$

- **Problema irrestricto:** diremos que un problema no tiene restricciones (o es irrestricto) si $Q = \mathbb{R}^n$.
- **Problema con restricciones de igualdad:** diremos que un problema está sujeto a restricciones de igualdad si, dada una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua, tenemos que

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \vec{0}\}$$

- **Problema con restricciones de desigualdad:** diremos que un problema está sujeto a restricciones de desigualdad si, dada una función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua, tenemos que

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in \{1, \dots, p\}) h_i(x) \leq 0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq \vec{0}\} \end{aligned}$$

- **Problema con restricciones mixtas:** diremos que un problema está sujeto a restricciones mixtas si tiene restricciones de igualdad y de desigualdad, es decir, dadas $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones continuas, tenemos que

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \vec{0}_m \wedge h(x) \leq \vec{0}_p\}$$

Notemos que, para el caso particular $m = n$, a partir de las restricciones de igualdad podríamos encontrar explícitamente el valor de cada componente del vector $x \in \mathbb{R}^n$. Por ello, si tenemos más de n restricciones de igualdad y el sistema es incompatible (es decir, no existe solución), la región factible es el conjunto vacío. Lo mismo sucede con las restricciones de desigualdad, aunque es más difícil de verificar que se cumplan esas situaciones (para $n = 1, 2, 3$, podemos bosquejar la región factible; desde $n = 4$ ya no es posible verla gráficamente).

Ejemplos: Podemos analizar los siguientes problemas

1. Un problema irrestricto:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } x^2 + 3y^3 \\ \text{s.a.} \quad & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

2. Un problema con restricción de igualdad:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } x^2 - y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y = 1 \end{aligned}$$

Notemos dos cosas: si definimos $g(x, y) = x + y - 1$, la restricción es de la forma $g(x, y) = 0$. Además, de la restricción tenemos que $y = 1 - x$, expresión que podemos reemplazar en la función objetivo para así obtener un problema irrestricto:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } x^2 - (1 - x)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } 2x - 1 \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Un problema con restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx } 3x + 2y - 5 \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 4 \\ & x - y \geq 2 \end{aligned}$$

Podemos definir $h(x, y) = (x + y - 4, -x + y + 2)$. En este caso, es sencillo graficar la región que definen las restricciones intersectando las regiones que define cada restricción individualmente.

4. Un problema con restricciones mixtas:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx } - \sum_{i=1}^n x_i \ln(1 - x_i) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

El problema, como tiene n variables, es bastante más difícil de visualizar. Las restricciones están dadas por

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - 1 \text{ y } h(\vec{x}) = -\vec{x}. \text{ Además, es claro que despejar sólo una variable en función de las demás no ayuda a resolver el problema.}$$

En este curso sólo veremos hasta problemas con restricciones de igualdad, aunque haremos pequeñas menciones a otras situaciones. Los cursos de Optimización IN3701 y MA3701 abordan con mayor profundidad los problemas de restricción mixta y problemas discretos, entre otros.

1.3. Condiciones de optimalidad

En esta sección veremos algunos métodos estándar que nos permitirán calcular la solución a un problema de optimización. Debemos distinguir entre problemas irrestrictos y problemas con restricciones de igualdad, pues los primeros tienen propiedades bastante agradables en comparación con los segundos. No obstante, por medio del procedimiento que daremos para el problema con restricciones, veremos que se puede llevar dicho problema a uno irrestricto.

Definición 5: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $\bar{x} \in \Omega$, decimos que $f(\bar{x})$ es

- **Máximo global** si $(\forall x \in \Omega) \ f(x) \leq f(\bar{x})$
- **Máximo local** si $(\exists \delta > 0)(\forall x \in B(\bar{x}, \delta)) \ f(x) \leq f(\bar{x})$
- **Mínimo global** si $(\forall x \in \Omega) \ f(x) \geq f(\bar{x})$
- **Mínimo local** si $(\exists \delta > 0)(\forall x \in B(\bar{x}, \delta)) \ f(x) \geq f(\bar{x})$

Cualquier valor que satisfaga lo anterior, también recibe el nombre de valor extremo u óptimo. Además, un óptimo es llamado óptimo estricto si cambiamos, respectivamente, $\geq$ por $>$ y $\leq$ por $<$.

Obs.: De la definición, es claro que todo óptimo global también es óptimo local.

Definición 6: Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\bar{x} \in A \subseteq \Omega$.

- Si $f(\bar{x})$ es mínimo global en A , decimos que $\bar{x}$ es un argumento que minimiza a f en A . También se le llama argumento mínimo de f en A , y se denota

$$\bar{x} \in \underset{x \in A}{\operatorname{argmín}} f(x)$$

- Si $f(\bar{x})$ es máximo global en A , decimos que $\bar{x}$ es un argumento que maximiza a f en A . También se le llama argumento máximo de f en A , y se denota

$$\bar{x} \in \underset{x \in A}{\operatorname{argmáx}} f(x)$$

Obs.: Claramente, la notación sólo ayuda a resumir la idea de que $\bar{x}$ minimiza o maximiza a f en el conjunto que se indique, pero no aporta mayor información cuantitativa. Esto porque lo que nos interesa, generalmente, es $f(\bar{x})$. Como $\bar{x}$ generalmente es un vector en $\mathbb{R}^n$, tampoco conocemos (aunque la hay) una forma de comparar dos argumentos mínimos de alguna manera que sea útil, salvo por la región a la que pertenecen (si acaso está o no en la región factible).

Ejemplo: Si $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$ el máximo global es 2 y el mínimo global es -2. Estos resultados se alcanzan cada vez que $(x, y) = (2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ y $(x, y) = (\pi + 2k\pi, -\pi/2 + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Es decir

$$\underset{(x,y) \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmáx}} \cos(x) + \sin(y) = \{(2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\underset{(x,y) \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmín}} \cos(x) + \sin(y) = \{(\pi + 2k\pi, -\pi/2 + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Si $n = 1$, tenemos el caso de una función de variable real, el cual se estudió de forma extensa en el curso anterior. Haciendo el paralelo con lo aprendido entonces, sabemos que una función diferenciable y acotada cuya derivada se anula en algún punto, potencialmente alcanza un óptimo en dicho punto. Además, si su derivada es diferenciable, podemos saber si dicho óptimo es un máximo o un mínimo calculando la segunda derivada y viendo su signo al ser evaluada en él. Esto motiva la generalización a cualquier valor de n .

Definición 7: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en Ω . Decimos que un punto $\bar{x} \in \Omega$ es crítico o estacionario si $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$. Además, diremos que $\bar{x}$ es un punto silla si es crítico y no es óptimo.

Criterio de primer orden (condición necesaria): Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y consideremos un problema de optimización irrestricto. Si $\bar{x}$ es un óptimo local, entonces

$$\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$$

Dicho de otra forma, cuando abordemos un problema de optimización sin restricciones, para encontrar candidatos a óptimo debemos obtener el conjunto de puntos críticos de f :

$$Cr(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = \vec{0}\}$$

Eventualmente, al evaluar f en cada uno de ellos, seremos capaces de encontrar el o los óptimos locales. Sobre esto, hemos de mencionar tres hechos importantes:

- Este criterio nos dice que la condición $\nabla f(x) = 0$ es necesaria pero no suficiente; hay casos en que el gradiente se anula sin que se haya alcanzado ni un máximo ni un mínimo (considere el caso $f(x, y) = x^2 - y^2$ y note que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, pero que en una vecindad de él f crece y decrece).
- Como consecuencia de lo anterior, no podemos discriminar entre óptimos locales, óptimos globales o puntos silla, pues no hay forma de distinguirlos cualitativamente (al menos no a priori). A este respecto, resumimos el criterio de primer orden como el que nos permite encontrar puntos críticos, si es que existen, pero que no permite clasificarlos.
- Finalmente, este criterio, por sí solo, aporta poca información para el caso general en comparación al caso en que $n = 1$, donde este primer criterio efectivamente nos dice que un punto crítico es óptimo local si en una vecindad de él la derivada cambia de signo.

Dem.: Supongamos que $\nabla f(\bar{x}) \neq \vec{0}$ y definamos $g(t) = f(\bar{x} - t\nabla f(\bar{x}))$. Sin pérdida de generalidad, trataremos el caso en que $\bar{x}$ es mínimo local. El caso en que es máximo es análogo y se deja como ejercicio.

Como f es diferenciable en $\bar{x}$, se tiene que g es diferenciable en $\vec{0}$, y por lo tanto

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \varepsilon(t)$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$. Como $\bar{x}$ es un mínimo local de f , entonces $\vec{0}$ es mínimo local de g , por lo que existe $\delta > 0$ tal que $g(t) - g(0) \geq 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Usando esto en la igualdad anterior, tenemos que

$$(\forall t \in (-\delta, \delta)) \quad g'(0) - \frac{\varepsilon(t)}{t} \geq 0$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow 0$, tenemos que $g'(0) \geq 0$.

Usando la regla de la cadena para calcular $g'(0)$, tenemos que $0 > -(\nabla f(\bar{x}))^t \nabla f(\bar{x}) = -\|\nabla f(\bar{x})\|^2 \geq 0$, lo cual implica que $0 > 0$, una contradicción. ■

Ejemplos: Veremos candidatos a óptimos para algunas funciones.

1. Consideremos la función anterior, $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$. Entonces

$$\nabla f(x, y) = (-\sin(x), \cos(y))$$

Luego

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = (0, 0) &\iff (-\sin(x), \cos(y)) = (0, 0) \\ &\iff x = m\pi, y = \pi/2 + k\pi, \quad m, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Cr(f) = \{(m\pi, \pi/2 + k\pi) \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de nuestros candidatos a óptimos.

2. Sea $g : (-\infty, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(1 - x_i)$. Entonces

$$\nabla g(\vec{x}) = \left(\ln(1 - x_1) - \frac{x_1}{1 - x_1}, \dots, \ln(1 - x_n) - \frac{x_n}{1 - x_n} \right)$$

Luego

$$\nabla g(\vec{x}) = \vec{0} \iff \ln(1 - x_i) - \frac{x_i}{1 - x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Por lo tanto, como $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0$, concluimos que $\nabla g(\vec{0}) = \vec{0}$. Luego sabemos con certeza que $\vec{0} \in Cr(g)$.

Definición 8: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y ∇f es diferenciable en Ω . Definimos el hessiano de f en $\bar{x} \in \Omega$ como

$$H_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Obs.: Otra forma de definirlo es como el jacobiano de ∇f . Es fácil ver que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, el hessiano está bien definido y, en virtud del teorema de Schwarz, éste es una matriz simétrica. En el espacio vectorial de matrices cuadradas a coeficientes reales, una matriz simétrica también recibe el nombre de hermitiana o hermítica.

Definición 9: Sea $\bar{x} \in Cr(f)$. Diremos que $\bar{x}$ es un punto crítico degenerado o que degenera a f si $\det(H_f(\bar{x})) = 0$, y punto crítico no-degenerado o que no degenera a f en caso contrario.

Definición 10: Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Diremos que A es

- **definida positiva** si $(\forall x \in \mathbb{R}^n) \ x^t A x > 0$
- **semidefinida positiva** si $(\forall x \in \mathbb{R}^n) \ x^t A x \geq 0$

Análogamente, diremos que A es definida negativa (resp. semidefinida negativa) si cambiamos $>$ (resp. $\geq$) por $<$ (resp. $\leq$).

Proposición 1: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz simétrica. Del curso de Álgebra Lineal, sabemos que son

equivalentes:

- i) A es definida positiva
- ii) $-A$ es definida negativa
- iii) Los valores propios de A son positivos

$$iv) (\forall k \in \{1, \dots, n\}) \det(A^{(k)}) > 0, \text{ con } A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Criterio de segundo orden (condición necesaria): Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es dos veces diferenciable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. En un problema sin restricciones, tenemos que

- Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es mínimo local, entonces $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ y $H_f(\bar{x})$ es semidefinida positiva.
- Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es máximo local, entonces $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ y $H_f(\bar{x})$ es semidefinida negativa.

Dem.: El que $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ ya lo hemos demostrado. Veremos el caso en que $\bar{x}$ es mínimo local, dejando el segundo caso propuesto como ejercicio. Necesitamos demostrar, entonces, que $v^t H_f(\bar{x}) v \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Como el caso $v = \vec{0}$ es trivial, consideraremos $v \neq \vec{0}$. Sea $g(t) = f(\bar{x} - tv)$, que es dos veces diferenciable en $t = 0$ como consecuencia de que f lo sea en $\bar{x}$. Luego, usando una expansión de Taylor de segundo orden, tenemos que

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + o(t^2)$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$. Como $\bar{x}$ es mínimo local de f , $\bar{t} = 0$ es mínimo local de g , así, existe $\delta > 0$ tal que $g(t) - g(0) \geq 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Usando esto en la igualdad anterior, sigue que

$$(\forall t \in (-\delta, \delta)) \quad tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + o(t^2) \geq 0$$

Como $g'(0) = (\nabla f(\bar{x}))^t v = 0$ y $g''(0) = v^t H_f(\bar{x}) v$, tenemos que

$$(\forall t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}) \quad v^t H_f(\bar{x}) v + 2 \frac{o(t^2)}{t^2} \geq 0$$

Finalmente, tomando límite cuando $t \rightarrow 0$, concluimos que $v^t H_f(\bar{x}) v \geq 0$. ■

Nuevamente, esta condición es necesaria para la optimalidad, mas no suficiente. Por ejemplo, tomemos el caso $f(x) = x^3$; es claro que $f'(0) = 0$ y que $f''(0)$ es semidefinida positiva, pero $x = 0$ no es mínimo ni máximo. Daremos otro criterio cuyas hipótesis, a diferencia de los anteriores, asegure la optimalidad de un punto.

Criterio de segundo orden (condición suficiente): Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es dos veces diferenciable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos además que $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$. En un problema sin restricciones, tenemos que

- Si $H_f(\bar{x})$ es definida positiva, entonces $\bar{x}$ es mínimo local estricto de f .
- Si $H_f(\bar{x})$ es definida negativa, entonces $\bar{x}$ es máximo local estricto de f .
- Si $H_f(\bar{x})$ tiene valores propios positivos y negativos, entonces $\bar{x}$ es punto silla (esto es cierto incluso si $\bar{x}$ es degenerado).
- En cualquier otro caso, el criterio no permite concluir sobre la naturaleza de $\bar{x}$.

Dem.: Haremos el caso en que $H_f(\bar{x})$ es definida positiva. Por contradicción, supongamos que $\bar{x}$ no es un mínimo local estricto. Entonces, existe una sucesión $\{x_k\}_k$, con $x_k \neq \bar{x}$ tal que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}$ y $f(x_k) \leq f(\bar{x})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos usar en nuestro favor la expansión de Taylor y la desigualdad anterior, de forma que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad 0 \geq f(x_k) - f(\bar{x}) = \nabla(f(\bar{x}))^t (x_k - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x_k - \bar{x})^t H_f(\bar{x}) (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

donde $\lim_{x_k \rightarrow \bar{x}} \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|} = 0$. Por hipótesis, $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$, por lo tanto

$$0 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} \right)^t H_f(\bar{x}) \left(\frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} \right) + \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|}$$

Como la sucesión $\{z_k\}_k = \left\{ \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} \right\}_k$ es acotada, existe una subsucesión $\{z_{\varphi(k)}\}_k$ convergente a un punto $z \neq 0$. Así, tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$, se tiene que

$$0 \geq z^t H_f(\bar{x}) z$$

lo cual es una contradicción. ■

Ahora estamos en el caso en que las condiciones determinan si un punto $\bar{x}$ es óptimo (son suficientes), pero no son concluyentes a la hora de negar esto. En otras palabras, el recíproco es falso. Por ejemplo, consideremos $f(x) = x^4$; es claro que $x = 0$ es mínimo global y $f'(0) = 0$, pero $f''(0)$ no es definida positiva.

Obs.: Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y enfrentamos un problema irrestricto, el criterio anterior puede usarse libremente por la observación anterior (el teorema de Schwarz asegura que la matriz sea simétrica, requisito fundamental para clasificarla como definida positiva o definida negativa). En el caso más general, f no satisface esto, por lo que se debe tener cuidado al verificar que para $\bar{x} \in Cr(f)$, $H_f(\bar{x})$ sea simétrica aún si $f \notin \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Por otro lado, vale la pena recordar que si, por fortuna, $H_f(\bar{x})$ es una matriz diagonal (todos los elementos fuera de la diagonal son nulos), los valores propios son exactamente los valores en la diagonal.

Ejemplos: Veamos algunos casos en que este criterio es concluyente y otros en que no.

1. Consideremos la función $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$ y calculemos su hessiano. Para ello, hay que conocer las derivadas de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(-\sin(x))}{\partial x} = -\cos(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\cos(y))}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial(-\sin(x))}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(\cos(y))}{\partial y} = -\sin(y) \end{aligned}$$

Luego,

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{bmatrix}$$

Queremos evaluar H_f en los puntos que el criterio de primer orden nos indica. Recordemos que $Cr(f) = \{(m\pi, \pi/2 + k\pi) \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$. Para ello, debemos distinguir 4 casos: cuando $m, k \in \mathbb{Z}$ sean pares o impares.

m, k pares: Como $-\cos(m\pi) = -1$ y $-\sin(\pi/2 + k\pi) = -1$, se tiene que

$$H_f(m\pi, \pi/2 + k\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que es claramente definida negativa. Luego, el criterio nos dice que estos puntos son máximos locales. Además, $f(m\pi, \pi/2 + k\pi) = \cos(m\pi) + \sin(\pi/2 + k\pi) = 2$.

m, k impares: Como $-\cos(m\pi) = 1$ y $-\sin(\pi/2 + k\pi) = 1$, se tiene que

$$H_f(m\pi, \pi/2 + k\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es claramente definida positiva. Luego, el criterio nos dice que estos puntos son mínimos locales. Además, $f(m\pi, \pi/2 + k\pi) = \cos(m\pi) + \sin(\pi/2 + k\pi) = -2$.

m par, k impar: Como $-\cos(m\pi) = -1$ y $-\sin(\pi/2 + k\pi) = 1$, se tiene que

$$H_f(m\pi, \pi/2 + k\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en este caso, H_f no es definida positiva ni definida negativa, pues tiene un valor propio positivo y otro negativo. El criterio nos dice que éstos son puntos silla.

m impar, k par: Es análogo al caso anterior.

Concluimos que los únicos máximos son los dados por m, k pares, y siempre su imagen es 2, por lo que además son máximos globales. Similarmente, los únicos mínimos son los dados por m, k impares, y siempre su imagen es -2, por lo que además son mínimos globales.

Por supuesto, lo anterior nos es útil siempre que el dominio de la función no sea restringido. Veamos lo poco práctico que son los criterios de no cumplirse las hipótesis que hemos impuesto.

Ejemplos:

1. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y la región $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Tenemos que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, de forma que el único punto crítico es $(0, 0)$. Además,

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva, por lo que $(0, 0)$ sería mínimo global. Sin embargo, $(0, 0)$ no pertenece a la región Q , de manera que no es un punto factible para el problema de minimización.

En este caso particular, es fácil ver que $f(x, y)|_Q = 1$, de forma que todos los puntos en Q son óptimos globales.

2. Sean $f(x, y) = x + y$ y la región $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Tenemos que $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, por lo que f no tiene puntos críticos. Luego, f no posee máximo ni mínimo cuando no aplicamos restricciones a su dominio. Sin embargo, en Q f sí alcanza cotas (esto dado que f es continua y Q es compacto), y tenemos que el mínimo es 0 y el máximo es 2.
3. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , (x, y) \neq (2, 2) \\ -2 & , (x, y) = (2, 2) \end{cases}$ En este caso, encontramos que $(0, 0)$ es el único punto crítico, y que además es mínimo local. Pero no es global, ya que se tiene que $f(2, 2) < f(0, 0)$. El método para encontrar puntos críticos no funciona del todo en este caso, puesto que f no es diferenciable en $(2, 2)$ (menos aún dos veces diferenciable).

Para cubrir un espectro más amplio de problemas de optimización, consideraremos aquellos que tienen restricciones de igualdad, es decir, del tipo

$$\begin{array}{ll} (P) & \text{mín / máx } f(x) \\ \text{s.a.} & g(x) = 0 \end{array}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dependiendo de g , es posible dar varias alternativas para la resolución del problema. Por ejemplo, podríamos encontrar óptimos (si existen) usando los criterios anteriores, y en caso de que los puntos encontrados se encuentren en la región de restricción, habremos resuelto el problema. Lo malo es que, en general, esto no es aplicable pues, o bien los valores encontrados no satisfacen las restricciones, o bien la función jamás presenta estos óptimos.

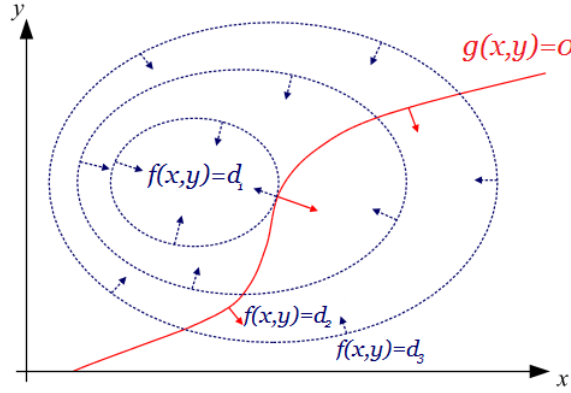
No obstante, existe un procedimiento que permite este cálculo en gran parte de los casos, el conocido método de los multiplicadores de Lagrange. Daremos una pequeña motivación al resultado general, partiendo por un ejemplo en dos dimensiones.

Ejemplo: Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} (P) & \text{máx } f(x, y) \\ \text{s.a.} & g(x, y) = 0 \end{array}$$

donde $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Buscamos el mayor valor que alcanza f cuando las variables están sujetas a pertenecer a la curva de nivel $\{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\}$. Con esto, a partir de la restricción, estaremos encontrando

curvas de nivel de f de la forma $\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = d\}$. Así, hacer máxima $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = 0$ es hallar el máximo valor de d tal que la curva de nivel $f(x, y) = d$ corte $g(x, y) = 0$. Como se ve en la figura, esto ocurre cuando ambas curvas se tocan en un sólo punto, puesto que, de no ser así, el valor de d puede seguir aumentando. Geométricamente, esto lleva a que el punto de interés, digamos, $(\bar{x}, \bar{y})$, es de tangencia para ambas curvas.



Pero esto significa que las normales a las curvas en $(\bar{x}, \bar{y})$ son idénticas, por lo tanto los vectores gradientes de f y g son paralelos, es decir, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y})$, para cierto escalar λ .

Notemos que si definiéramos $h(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, donde λ es el escalar encontrado antes, encontrar $(\bar{x}, \bar{y})$ que satisface la ecuación anterior es equivalente a encontrar un punto crítico de h .

Lo anterior puede ser usado en un problema de minimización de forma completamente análoga. La existencia de tal escalar λ es la piedra angular del teorema que veremos en seguida. Podemos generalizar la estrategia que se usó a funciones definidas para dimensiones mayores; basta definir una función que represente cómo afecta la restricción a la función objetivo, del modo en que definimos h en el ejemplo recién visto.

Definición 11: Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones continuas y diferenciables en el abierto Ω , tales que f es función objetivo del problema

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín / máx} & f(x) \\ \text{s.a.} & g(x) = \vec{0} \end{array}$$

Definimos la función lagrangiana (o lagrangiano) asociada al problema como la función $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^t g(x)$$

Al vector $\lambda \in \mathbb{R}^m$ se le llama multiplicador de Lagrange.

Obs.: Es fácil ver que L se puede escribir como $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.

Teorema 1 (Método de los multiplicadores de Lagrange): Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, ambas funciones de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ y tal que la matriz J_g es de rango máximo. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(\bar{x}) = \vec{0}$. Si $\bar{x}$ es óptimo local de f cuando está sujeta a la restricción que define g , entonces existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = \lambda^t \nabla g(\bar{x})$$

Obs.: Lo anterior es equivalente a decir que existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla L(\bar{x}) = 0$, donde L es el lagrangiano asociado. Es útil notar que el sistema $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) = 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$, recupera la restricción original del problema y también sirve a la hora de encontrar el valor de la solución por “fuerza mayor” (conociendo ciertas coordenadas del vector x es posible conocer otras a través de las restricciones).

Vale la pena recordar que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, con $m \geq n$, es de rango máximo si tiene n columnas linealmente independientes (en el caso $m \leq n$ la idea es la misma, en que es de rango máximo si tiene m filas linealmente independientes).

La demostración del teorema se dará en un apéndice pues requiere varias observaciones para asegurar que se comprenda.

Ejemplos:

1. Consideremos

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx } x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Definimos el lagrangiano $L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, y calculamos su gradiente:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (1 - 2\lambda x, 1 - \lambda y, -x^2 - y^2 + 1)$$

Resolvemos el sistema asociado a encontrar los puntos críticos de L :

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 & \iff & x = \frac{1}{2\lambda} \\ 1 - 2\lambda y &= 0 & \iff & y = \frac{1}{2\lambda} \\ -x^2 - y^2 + 1 &= 0 & \iff & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Usando las dos primeras ecuaciones en la tercera (la restricción), tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \\ \implies \lambda &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Luego, los dos puntos candidatos a ser máximo son $(x_1, y_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(x_2, y_2) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Podemos determinar cuál es simplemente evaluando en f , teniendo que el máximo se alcanza en (x_1, y_1) y es $\sqrt{2}$.

2. Resolvamos

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } x^2 y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 = 3 \end{aligned}$$

Definimos el lagrangiano asociado $L(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + y^2 - 3)$ y calculamos su gradiente:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (2xy - 2\lambda x, x^2 - 2\lambda y, -x^2 - y^2 + 3)$$

Resolvemos el sistema $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$. En este caso, iremos por paso:

$$2xy - 2\lambda x = 0 \iff x = 0 \vee y = \lambda$$

Para el caso en que $x = 0$, de la restricción tenemos que $y = \pm\sqrt{3}$. Así, tenemos los puntos $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{3})$ y $(x_2, y_2) = (0, -\sqrt{3})$.

Para el caso en que $y = \lambda$, de la segunda coordenada de $\nabla L(x, y, \lambda)$ tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 2\lambda y &= 0 & \iff & x^2 - 2\lambda^2 = 0 \\ & & \iff & x = \pm\sqrt{2}\lambda \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la restricción, obtenemos

$$\begin{aligned} 3 &= x^2 + y^2 \\ &= 2\lambda^2 + \lambda^2 \\ &= 3\lambda^2 \\ \implies \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Así, tenemos como candidatos los puntos $(x_3, y_3) = (\sqrt{2}, 1)$, $(x_4, y_4) = (-\sqrt{2}, 1)$, $(x_5, y_5) = (\sqrt{2}, -1)$ y $(x_6, y_6) = (-\sqrt{2}, -1)$.

Finalmente, por simple evaluación tenemos que el mínimo se alcanza tanto en (x_5, y_5) como en x_6, y_6 y es -2 .

3. Consideremos, finalmente,

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{máx} \quad -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \\ &\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned}$$

Definimos el lagrangiano $L(x, \lambda) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i - 1)$ y resolvemos $\nabla L(x, \lambda) = 0$. En este caso, como se trata de $n+1$ variables, solamente resolveremos $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$:

$$\begin{aligned} -\ln(x_i) - 1 - \lambda &= 0 &\iff x_i &= e^{-1-\lambda}, & i &= \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^n x_i - 1 &= 0 &\iff \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos que todos los x_i serán iguales, pues sólo dependen de λ . Usando la restricción, tenemos que $ne^{-1-\lambda} = 1$, de forma que $x_i = \frac{1}{n}$, $i = \{1, \dots, n\}$.

1.4. Conjuntos y funciones convexas

Los problemas de optimización son interesantes, puesto que los encontramos tanto en la vida cotidiana (dado un día de ofertas, ¿cómo puedo comprar la mayor cantidad de bienes en oferta si necesito una cantidad base de cada uno de ellos y cuento con un presupuesto fijo?) como en los campos más profundos de las ciencias exactas. Un ejemplo simple recupera la noción de gradiente de una función derivable f , ∇f . Sabemos de capítulos anteriores que éste nos indica la dirección de mayor ascenso de dicha función desde un punto del dominio. Así mismo, $-\nabla f$ representa la dirección de mayor descenso. Luego, si aceptamos la hipótesis sobre la que trabaja la Mecánica Clásica (todo sistema en *desequilibrio* se estabiliza en la *dirección* que le significa menor exigencia energética), cualquier problema que involucre un sistema dinámico buscará la dirección en la cual el sistema se equilibra, pues es la “tendencia natural”.

Sin embargo, problemas que a priori suenan tan sencillos de resolver como el anterior pueden ser de suma dificultad, incluso imposibles de *predecir* (tal cual, si nos enfrentamos a sistemas caóticos, éstos tienden a estabilizarse en ciertos puntos y luego desestabilizarse en vecindades de los mismos).

Como es de esperar, abarcaremos problemas que sí podamos resolver con lo que hemos aprendido hasta ahora. En esta pequeña sección nos dedicaremos a enunciar propiedades que nos permitirán determinar la existencia de soluciones a un problema de optimización sin necesidad de calcularlas. Para ello, nos basaremos fuertemente en la noción de convexidad, propiedad tan fundamental en el Análisis Funcional que, sin ella, este capítulo no tendría mayo utilidad práctica.

Definición 12: Sea $\vec{E}$ un e.v.r. (no necesariamente normado). Un conjunto $S \subseteq \vec{E}$ se dirá convexo si

$$(\forall x, y \in S)(\forall t \in [0, 1]) tx + (1-t)y \in S$$

Obs.: De la definición se desprende, en términos informales, que un conjunto es convexo si dados dos puntos cualquiera en él, el segmento que los une está completamente contenido en el conjunto. Es claro que $\vec{E}$ es un conjunto convexo. Más aún, si S es un s.e.v. de $\vec{E}$, también debe ser convexo (esto incluye al conjunto vacío).

Como veremos, los conjuntos convexas tienen propiedades muy agradables. En particular, en $\mathbb{R}$ los conjuntos convexas son muy conocidos (aquí es posible verificar que un conjunto es convexo si y sólo si es un intervalo). En $\mathbb{R}^n$ también se puede ver que todo conjunto que es producto de n intervalos es convexo, pero éstos ya no son los únicos posibles.

Proposición 2: Sean $\vec{E}$ un e.v.r. y $S \subseteq \vec{E}$ un subconjunto cualquiera.

1. Si S es convexo, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \vec{E}$ los conjuntos

$$\lambda S = \{ z \in \vec{E} \mid z = \lambda x, x \in S \}$$

$$S + y = \{ z \in \vec{E} \mid z = x + y, x \in S \}$$

son convexos.

2. Si S es convexo, entonces $\overline{S}$ es convexo.
3. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia cualquiera de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es convexo.
4. Si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente (i.e., $(\forall n \in \mathbb{N}) S_n \subseteq S_{n+1}$) de conjuntos convexos, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ es convexo.

Dem.: La demostración de 3 y 4 se propone como ejercicio.

1. En primer lugar, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in \lambda S$. Dado $t \in [0, 1]$, definimos $z = tx_1 + (1-t)x_2$ y queremos mostrar que $z \in \lambda S$.

En efecto, como $x_1 = \lambda w_1$ y $x_2 = \lambda w_2$, con $w_1, w_2 \in S$, tenemos que

$$\begin{aligned} z &= tx_1 + (1-t)x_2 \\ &= t\lambda w_1 + (1-t)\lambda w_2 \\ &= \lambda(tw_1 + (1-t)w_2) \\ &= \lambda w_3 \end{aligned}$$

con $w_3 = tw_1 + (1-t)w_2 \in S$ pues $w_1, w_2 \in S$ y S es convexo. Luego, $\lambda w_3 = z \in \lambda S$.

Similarmente, sean $y \in \vec{E}$ y $x_1, x_2 \in S + y$. Dado $t \in [0, 1]$, definimos $z = tx_1 + (1-t)x_2$ y queremos mostrar que $z \in S + y$.

Como $x_1 = w_1 + y$ y $x_2 = w_2 + y$, con $w_1, w_2 \in S$, tenemos que

$$\begin{aligned} z &= tx_1 + (1-t)x_2 \\ &= t(w_1 + y) + (1-t)(w_2 + y) \\ &= tw_1 + (1-t)w_2 + ty + (1-t)y \\ &= tw_1 + (1-t)w_2 + y \\ &= w_3 + y \end{aligned}$$

con $w_3 \in S$ pues $w_1, w_2 \in S$ y S es convexo. Por lo tanto, $w_3 + y = z \in S + y$.

2. Sean $x, y \in \overline{S}$ y $t \in [0, 1]$. Como x e y son puntos adherentes, existen sucesiones $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq S$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Luego

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + (1-t) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} tx_n + (1-t)y_n \end{aligned}$$

Como, por convexidad, $tx_n + (1-t)y_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión es convergente por álgebra de sucesiones convergentes,

$$tx + (1-t)y = \lim_{n \rightarrow \infty} tx_n + (1-t)y_n \in \overline{S}$$

■

Obs.: De la proposición anterior, el punto 1 implica que, si $\vec{F}$ es e.v.r. y $f : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ es una función lineal, entonces

$$C \subseteq \vec{F} \text{ es convexo} \implies f^{-1}(C) = \{ x \in \vec{E} \mid f(x) \in C \} \text{ es convexo}$$

Proposición 3: Sea $(\vec{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n.r.

1. La bola unitaria cerrada $B[0_{\vec{E}}, 1]$ es convexa.
2. Si $C \subseteq \vec{E}$ es convexo, entonces $\overset{\circ}{C}$ es convexo.

Dem.: Notemos que en la demostración usamos fuertemente que $\vec{E}$ es un e.v.n.r. Sin embargo, hay formas de demostrar 2 sin tener más estructura que un e.v.r. (aunque no lo precisaremos dado que requiere conceptos topológicos que no han sido abordados en el curso).

1. Sean $x, y \in B[0_{\vec{E}}, 1]$ y $t \in [0, 1]$. Luego

$$\begin{aligned}
 \|z\| &= \|tx + (1-t)y\| \\
 &\leq \|tx\| + \|(1-t)y\| \\
 &= |t|\|x\| + |1-t|\|y\| \\
 &= t\|x\| + (1-t)\|y\| \\
 &\leq t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Luego $z \in B[0_{\vec{E}}, 1]$.

2. Sean $x, y \in \overset{\circ}{C}$. Como $\overset{\circ}{C}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon), B(y, \varepsilon) \subseteq C$. Esto es lo mismo que decir

$$(\forall w \in \vec{E}) \|w\| < \varepsilon \implies w + x, w + y \in C$$

Como C es convexo, dado $t \in [0, 1]$ siempre se tiene que

$$z = tx + (1-t)y \in C$$

Además, como $w + x, w + y \in C$ con $\|w\| < \varepsilon$, por convexidad de C también se tiene que

$$t(w + x) + (1-t)(w + y) \in C$$

Luego, notemos que $t(w + x) + (1-t)(w + y) = w + tx + (1-t)y = w + z \in C$. Entonces,

$$(\forall w \in \vec{E}) \|w\| < \varepsilon \implies w + z \in C$$

lo cual es lo mismo que decir que $z \in \overset{\circ}{C}$. Esto es cierto para todo $t \in [0, 1]$, con lo que hemos probado que $\overset{\circ}{C}$ es convexo. ■

Obs.: Por lo anterior, la bola abierta $B(0_{\vec{E}}, 1)$ también es convexa. Más aún, toda bola (abierta o cerrada) es convexa, pues se puede verificar que

$$(\forall a \in \vec{E}, r \geq 0) B(a, r) = a + rB(0_{\vec{E}}, 1)$$

y vimos que la convexidad es una propiedad invariante bajo operaciones afines (sumas y escalamientos por constantes).

Definición 13: Sean $\vec{E}$ un e.v.r. y $C \subseteq \vec{E}$. Se define la envoltura convexa de C como

$$\text{conv}(C) = \bigcap_{C \subseteq S} \{S \mid S \text{ convexo}\}$$

Se tiene que si $C \neq \emptyset$ entonces $\text{conv}(C)$ es no vacío pues, en particular, $C \subseteq \vec{E}$, que es convexo.

Proposición 4: Sea $C \subseteq \vec{E}$. Entonces

1. $\text{conv}(C)$ es convexo y es el más pequeño que contiene a C .

2. $\text{conv}(C)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas en C , es decir,

$$\text{conv}(C) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_i x_i \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\}) x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

3. $C = \text{conv}(C) \iff C$ es convexo.

Dem.: La demostración de 3 queda propuesta.

1. Es claro que es convexo, pues es intersección de convexas. Finalmente, es el más pequeño, pues si hubiese un convexo C' contenido en $\text{conv}(C)$ y que contuviera C , estaría dentro de la familia sobre la que se intersecciona, y luego $\text{conv}(C)$ estaría contenido en C' . Esto implica que $C' = \text{conv}(C)$.

2. Por el punto anterior, basta mostrar que el conjunto $\hat{C} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_i x_i \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\}) x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$ es convexo, contiene a C y está contenido en cualquier otro convexo que contenga a C .

■ Es claro que $C \subseteq \hat{C}$, pues cada $x \in C$ se puede escribir como $\sum_{i=1}^1 1 \cdot x$, luego $x \in \hat{C}$.

■ Para ver que $\hat{C}$ es convexo, sean $x, y \in \hat{C}$ y $t \in [0, 1]$. Queremos ver que $z = tx + (1-t)y \in \hat{C}$. En efecto, por definición,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_j$$

donde $(\forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}) \tilde{x}_i, \tilde{y}_j \in C, \lambda_i, \tilde{\lambda}_j \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j = 1$. Luego

$$\begin{aligned} z &= tx + (1-t)y \\ &= t \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i + (1-t) \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_j \\ &= \sum_{i=1}^n t \lambda_i \tilde{x}_i + \sum_{j=1}^m (1-t) \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_j \\ &= \sum_{k=1}^{m+n} \bar{\lambda}_k w_k \end{aligned}$$

donde

$$\bar{\lambda}_k = \begin{cases} t \lambda_k & , \quad 1 \leq k \leq n \\ (1-t) \tilde{\lambda}_{k-n} & , \quad n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

$$w_k = \begin{cases} \tilde{x}_k & , \quad 1 \leq k \leq n \\ \tilde{y}_{k-n} & , \quad n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

Es claro que $w_k \in C$ para todo k . Además,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+n} \bar{\lambda}_k &= \sum_{k=1}^n t \lambda_k + \sum_{k=n+1}^{m+n} (1-t) \tilde{\lambda}_k \\ &= t \sum_{k=1}^n \lambda_k + (1-t) \sum_{k=n+1}^{m+n} \tilde{\lambda}_k \\ &= t + (1-t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego $z \in \hat{C}$.

- Finalmente, sea S un convexo cualquiera tal que $C \subseteq S$. Luego, S contiene a todas las combinaciones convexas en C (esto se puede verificar fácilmente por inducción sobre un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq C$), por lo que $S \supseteq \hat{C}$.

■

Definición 14: Sean $\vec{E}$ un e.v.r. y $C \subseteq \vec{E}$ un subconjunto convexo. Decimos que $z \in C$ es punto extremo si

$$(\forall x, y \in C, t \in [0, 1]) z = tx + (1 - t)y \implies z = x \text{ o } z = y$$

Dicho de otra forma, son los puntos que no yacen estrictamente en el segmento definido por dos puntos distintos (los extremos del segmento).

Al conjunto de puntos extremos se le denota

$$\text{ext}(C) = \{x \in C \mid x \text{ es punto extremo}\}$$

Proposición 5: Sean $(\vec{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n.r. y $C \subseteq \vec{E}$ un subconjunto convexo. Entonces

$$x \in \text{ext}(C) \implies x \in \partial(C)$$

Obs.: Esta propiedad nos dice que, de existir puntos extremos, éstos están en la frontera. Recíprocamente, no es cierto que todo punto fronterizo es extremo. Esto porque C puede ser un conjunto abierto (considere, por ejemplo, el intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$), en que la frontera no está contenida en el conjunto, o bien porque C podría tener un “lado recto” (es fácil de ver en $\mathbb{R}^2$), por lo que habría puntos de la frontera que no son extremos.

Dem.: Lo haremos por contradicción. Para ello, notemos que $x \notin \partial(C) \iff x \notin \overline{C} \cap (\overset{\circ}{C})^c \iff x \in \overline{C}^c \cup \overset{\circ}{C}$.

- Es claro que $x \in \overline{C}^c \implies x \notin \overline{C} \implies x \notin C \implies x \notin \text{ext}(C)$.
- Supongamos que $x \in \overset{\circ}{C}$. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq C$. Se tiene que

$$(\forall w \in \vec{E}) \|w\| \leq \delta \implies w \in B(x, \delta)$$

En particular, por continuidad de la norma, existe $w = x - x_0$ tal que $\|w\| = \delta/2$, de manera que $x \pm w \in B(x, \delta)$. Como $\delta > 0$, se tiene que $x \neq x \pm w$ y

$$\begin{aligned} x &= t(x - w) + (1 - t)(x + w) \\ &= tx - tw + x + w - tx - tw \\ &= x + w - 2tw \\ \implies 2tw &= w \end{aligned}$$

Luego, basta que $t = 1/2$. Por lo tanto, $x \notin \text{ext}(C)$.

■

Por supuesto, todo lo anterior es aplicable a los espacios estudiados hasta ahora, en particular a $\vec{E} = \mathbb{R}^n$. Nos centraremos ahora en el estudio de funciones cuya imagen pueda relacionarse, en cierto modo, con conjuntos convexas.

Definición 15: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es convexa si

$$(\forall x, y \in \Omega, t \in [0, 1]) f(tx + (1 - t)y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y)$$

Decimos que f es estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta. Análogamente, se dice que f es cóncava si reemplazamos $\leq$ por $\geq$ (y similarmente, se define una función estrictamente cóncava).

Definición 16: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define el epigrafo y el hipografo de f , respectivamente, como

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$$

$$hip(f) = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid f(x) \geq \lambda\}$$

Dicho de otra forma, son los puntos que se ubican en y “sobre” el grafo de f (resp. en y “bajo” el grafo de f).

Proposición 6: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes

- i) f es convexa.
- ii) $-f$ es cóncava.
- iii) $epi(f)$ es un conjunto convexo.
- iv) $hip(-f)$ es un conjunto convexo.

Dem.: La equivalencia ii) $\iff$ iv) se plantea como ejercicio.

i) $\implies$ ii): Sean $x, y \in \Omega$, $t \in [0, 1]$. Como f es convexa, se tiene que

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ \iff -f(tx + (1-t)y) &\geq -tf(x) - (1-t)f(y) \\ &= t(-f(x)) + (1-t)(-f(y)) \end{aligned}$$

Luego, definiendo $g = -f$, se tiene que $g(tx + (1-t)y) \geq tg(x) + (1-t)g(y)$, es decir, g es cóncava.

ii) $\implies$ i): Es análogo a lo anterior.

i) $\implies$ iii): Sean $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2) \in epi(f)$ y $t \in [0, 1]$. Definimos

$$(y, \mu) = t(x_1, \lambda_1) + (1-t)(x_2, \lambda_2) = (tx_1 + (1-t)x_2, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)$$

Como f es convexa, se tiene que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(tx_1 + (1-t)x_2) \\ &\leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ &\leq t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 \\ &= \mu \end{aligned}$$

Luego, $f(y) \leq \mu$, por lo que $(y, \mu) \in epi(f)$.

iii) $\implies$ i): Como $epi(f)$ es convexo, dados $(x, \lambda), (y, \mu) \in epi(f)$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$t(x, \lambda) + (1-t)(y, \mu) = (tx + (1-t)y, t\lambda + (1-t)\mu) \in epi(f)$$

Esto se cumple, en particular, para $\lambda = f(x)$, $\mu = f(y)$. Luego

$$\begin{aligned} (tx + (1-t)y, t\lambda + (1-t)\mu) \in epi(f) &\implies f(tx + (1-t)y) \leq t\lambda + (1-t)\mu \\ &\implies f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

por lo que f es convexa. ■

Ahora veremos qué resultados podemos obtener si una función que es convexa además es diferenciable. Para ello, motivaremos algunas propiedades con algunos resultados conocidos para funciones de una variable.

Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, supongamos que f es convexa. En tal caso, para $x, y \in [a, b] \setminus \{\bar{x}\}$ y $\lambda \in [0, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ \implies \frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(y)}{\lambda} &\leq f(x) - f(y) \\ \implies \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda(x - y)}(x - y) &\leq f(x) - f(y) \end{aligned}$$

Si tomamos límite cuando $\lambda \rightarrow 0$, como f es diferenciable, tenemos que $f'(y)(x - y) \leq f(x) - f(y)$, es decir,

$$(\forall x, y \in (a, b)) \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

Por otro lado, si asumimos cierta la desigualdad anterior, tomando $\lambda \in [0, 1]$, multiplicando la expresión por $(1 - \lambda)$ y tomando los puntos x y $(1 - \lambda)x + \lambda y$, tenemos que

$$(1 - \lambda)f(x) \geq (1 - \lambda)f((1 - \lambda)x + \lambda y) - (1 - \lambda)\lambda f'((1 - \lambda)x + \lambda y)(x - y)$$

De igual forma, multiplicando la desigualdad por λ , para los puntos y y $(1 - \lambda)x + \lambda y$, resulta

$$\lambda f(y) \geq \lambda f((1 - \lambda)x + \lambda y) + \lambda(1 - \lambda)f'((1 - \lambda)x + \lambda y)(y - x)$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1 - \lambda)x + \lambda y)$$

es decir, f es convexa.

Si además, para $c \in (a, b)$, se tiene que $f'(c) = 0$, tenemos que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$. Por lo tanto, c es mínimo global

Notemos que sólo usamos que el dominio de la función es real para dividir por la variable. Sin embargo, todo lo anterior sigue siendo válido si sustituimos esta operación por una multiplicación. Más generalmente, podemos enunciar la siguiente proposición, cuya demostración se deja como ejercicio:

Proposición 7: Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en C . Entonces

$$f \text{ es convexa} \iff (\forall x, y \in C) \quad f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

En particular, si $\nabla f(c) = \vec{0}$, entonces c es mínimo global.

1.4.1. Aplicaciones de la convexidad en funciones

Hay muchas nociones de convexidad muy interesantes para funciones a valores reales. Una de ellas es la convexidad logarítmica, condición que satisfacen aquellas funciones $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\ln \circ f$ es convexa. Las posibilidades que nos presenta el mundo de la convexidad son sumamente diversas y de amplia aplicación, razón por la que aún hoy es objeto de estudio e investigación. En esta humilde sección, nos concentraremos en algunas propiedades que presentan funciones convexas que además son diferenciables, con el objetivo de vincularlas a la teoría de la optimización.

Para introducir más resultados, supongamos que estamos resolviendo un problema de optimización (por ejemplo, de minimización). Sabemos que un punto que resuelva un problema de minimización irrestricto será tal que, en un entorno de éste, todo otro punto representa un incremento en la función objetivo. Si agregamos que dicha función es diferenciable en su dominio, la solución se obtiene en un punto estacionario (en que la derivada se anula).