

MA2001-1. Cálculo en Varias Variables.**Profesor:** Marcelo Leseigneur**Auxiliares:** Simón Piga - Valentín Retamal**Ayudante:** Obed Ulloa**Fecha:** 23 de Enero de 2015

Examen

P1 i) Sea $z = f(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 z e^y + y^2 e^z + y = 1$$

Si $g(u, v) = (u^2 + v + 1, v^2)$, calcule $\frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial u \partial v}(0, 0)$. Justifique.

ii) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ para $x \neq 0$, $y \neq 0$, respectivamente.

b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ determine $\nabla f(x, y)$ y $H_f(x, y)$. ¿Es $H_f(x, y)$ una matriz simétrica?

c) ¿Se cumple que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$? Justifique.

P2 i) Encuentre la máxima distancia el origen a la superficie dada por la ecuación

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$$

donde $0 < c < b < a$.

ii) Resuelva el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & - \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

P3 i) Sea $\mathcal{R}$ la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1 \quad x^2 - y^2 = 9 \quad x + y = 4 \quad x + y = 6$$

Considere el cambio de variables dado por $u = x + y$, $v = x - y$ que transforma la región $\mathcal{R}$ del plano XY en la región $\mathcal{T}$ del plano UV .

a) Dibuje las regiones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$.

- b) Expresar el área de la región $\mathcal{R}$ como la suma de 3 integrales en las variables x e y , en el orden de integración $dydx$. Explícite los límites de integración y resuelva hasta donde pueda.
- c) Calcule utilizando el cambio de variables el área de la región $\mathcal{R}$.
- ii) Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras posibles:

a)
$$\int_0^1 \int_x^1 xy \, dydx$$

b)
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta \, drd\theta$$

c)
$$\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 \, dxdy$$