

# Capítulo 5

## Integración

### 5.1. Introducción

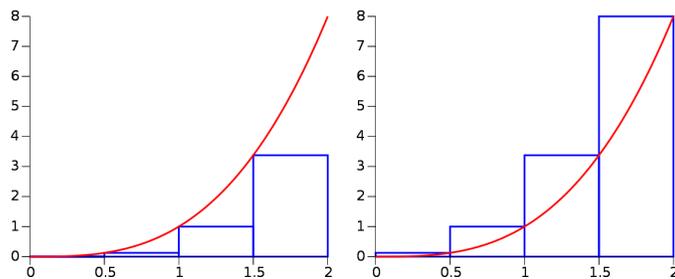
Hasta ahora hemos abordado temas relacionados básicamente con el Análisis y el Cálculo Diferencial (especialmente en espacios de Banach), y que en principio relacionábamos con el caso particular en que el espacio fuera  $\mathbb{R}$ , o algún subconjunto de él, tanto para el cálculo de límites, como derivadas, óptimos de funciones, nociones de continuidad, etcétera.

Lo que introduciremos en este capítulo corresponde a una extensión de lo que conocemos hasta ahora por Integración, y que fue abordado en el curso previo. Para dar una correcta noción de cómo se integra en e.v.n. mas generales, cuyo estudio se inserta en una teoría general de las Matemáticas denominada Teoría de la Medida, debemos comenzar por tratar el caso de  $\mathbb{R}^n$ , recordando algunas nociones vistas para el caso para  $n = 1$  y generalizando a  $n = 2$  y  $n = 3$  en función de las aplicaciones físicas y geométricas de la ingeniería, y así definir inequívocamente el concepto de integral múltiple.

Volveremos a revisar conceptos como Particiones, Sumas de Riemann, condiciones de Riemann-integrabilidad y Parametrización con tal de ampliar nuestro estudio realizado para Cálculo de una Variable. A continuación, daremos un conjunto de ejemplos y argumentos que permitan no sólo calcular integrales sino que además entregar las herramientas para juzgar la pertinencia del concepto.

### 5.2. Concepto de Área

Dada una función positiva  $f$ , una pregunta muy natural es si existe una expresión para el área bajo su grafo. Para responder esta interrogante, podemos intentar aproximar un valor real que represente dicha área, y una de las formas de hacerlo es considerar dos aproximaciones: una inferior, que sume áreas de rectángulos inscritos en la curva de  $f$ ; la segunda, una superior, que sume áreas de rectángulos circunscritos en la curva de  $f$ , como indica la figura.



Aproximación por rectángulos del área de  $f(x) = x^3$  en  $[0, 2]$

Para calcular estas cantidades de forma consistente, debemos establecer reglas que se apliquen a conjuntos generales. Luego, el cálculo de áreas será una aplicación particular de esta teoría.

Se parte por asumir tres hipótesis (que harán la suerte de axiomas). Denotaremos por  $\mathcal{R}$  una región del plano, y será  $A(\mathcal{R})$  un número real que determina el área que encierra dicha región. Dicho esto,

- $(\forall \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2) \quad A(\mathcal{R}) \geq 0$
- $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset \Rightarrow A(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2)$
- Si  $\mathcal{R}$  es un rectángulo, es decir,  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ , entonces  $A(\mathcal{R}) = (b - a) \cdot (d - c)$

**Proposición 1**  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \implies A(\mathcal{R}_1) \leq A(\mathcal{R}_2)$

**Dem.:** Podemos escribir  $\mathcal{R}_2$  como

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup (\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1)$$

que resulta ser una unión disjunta. Luego, por el segundo postulado,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}_2) &= A(\mathcal{R}_1 \cup (\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1)) \\ &= A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1) \quad , \text{ donde } A(\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1) \geq 0 \\ &\geq A(\mathcal{R}_1) \end{aligned}$$

■

Si consideramos el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y = f(x)\}$ , las hipótesis anteriores pueden aplicarse en él. Para esto, una condición que imponemos en  $f$  es que esté bien definida en  $[a, b]$ , es decir, que no se haga infinita. Si esto se cumple, diremos que  $f$  es acotada. Notemos además que no pediremos que  $f$  sea continua en  $[a, b]$ .

Finalmente, dada una función  $f$ , lo que calcularemos será exactamente el área bajo su curva si además  $f \geq 0$ .

¿Cómo podemos realizar, formalmente, un procedimiento como el descrito en la imagen anterior? Es decir, parece correcto tomar rectángulos que hagan lo que mencionamos, pero es perentorio saber cómo se definen matemáticamente y si acaso es posible que cumplan su misión. Necesitamos dos cosas para definir cada rectángulo: una base y una altura. Daremos definiciones de éstas en función de  $[a, b]$  y  $f$ .

**Definición 1:** Se define una partición de un intervalo  $I = [a, b]$  como

$$P(I) = \{x_i \in I \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Notemos que, como resultado de la partición, necesariamente se tiene que el intervalo original se divide en subintervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  cuya unión es el mismo intervalo, esto es

$$I = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] = \bigcup_{i=1}^n I_i$$

Denotamos por  $\mathcal{P}_I$  al conjunto de todas las particiones sobre el intervalo  $I$ .

**Ejemplo:** Si tenemos el intervalo  $I = [0, 1]$ , podemos definir en él las siguientes particiones:

1.  $P_1 = \{0, 1\}$  (partición trivial)
2.  $P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
3.  $P_3 = \{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}, 1\}$
4.  $P_4 = \{\frac{i}{n}\}_{i=0}^n$

**Definición 2:** Se define la norma de una partición  $P(I)$  como la mayor distancia entre puntos vecinos contenidos en ella, esto es:

$$|P(I)| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

**Ejemplo:** Considerando nuevamente  $I = [0, 1]$ :

1.  $|P_1| = 1$
2.  $|P_2| = \frac{1}{2}$
3.  $|P_3| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$
4.  $|P_4| = \frac{1}{n}$

**Observación:** Si la partición es uniforme (todos los puntos están equiespaciados), se tiene que

$$|P(I)| = (x_i - x_{i-1})_{i=1, \dots, n} = \frac{b-a}{n}$$

Otras acepciones equivalentes son partición regular, equidistante o equipartición. En el ejemplo anterior,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_4$  son uniformes.

Normalmente usaremos este último tipo de particiones, para calcular de forma simple los primeros resultados. Finalmente, notemos que, dada una partición finita cualquiera, podemos construir otra partición que incluya los puntos de la primera más (resp. menos) algunos otros. Esto define la noción de partición más fina (resp. menos fina).

**Definición 3** Diremos que una partición  $Q$  es más fina que  $P$  si  $P \subseteq Q$ . También diremos que  $Q$  es un refinamiento de  $P$ , o que  $P \preceq Q$ .

**Observación:**  $\preceq$  es una relación de orden parcial para  $\mathcal{P}_I$ . Es fácil darse cuenta de que, en  $[a, b]$ ,  $P = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$  y  $Q = \{a, \frac{a+b}{3}, b\}$  no son comparables.

La forma más intuitiva de aproximar el área encerrada entre un intervalo y su imagen, es a través de las llamadas Sumas de Riemann, en que se toma el intervalo de interés, se particiona (idealmente en partes iguales), y la longitud de cada subintervalo definido por la partición se interpreta como la base de un rectángulo; por último, las Sumas de Riemann aproximan inferior y superiormente el área buscada tomando como alturas el ínfimo y el supremo de la función en cada subintervalo, respectivamente, y calculando la suma del área de todos los rectángulos así definidos. Formalmente:

**Definición 4:** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $I = [a, b]$  un intervalo tal que  $I \subseteq \text{dom}(f)$ , y  $P$  una partición de dicho intervalo. Definimos las cantidades:

- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- $m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
- $M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Entonces, se definen la suma inferior y la suma superior de  $f$  con respecto a la partición  $P$  como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \cdot \Delta x_i$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \cdot \Delta x_i$$

Las sumas inferior y superior suelen conocerse también como aproximación por defecto y aproximación por exceso, respectivamente.

Es claro que  $\Delta x_i \leq |P|$ , por lo que la idea de tomar una partición equitativa (que podemos llamar, simplemente, equipartición) es que  $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \Delta x_i = |P| = \frac{b-a}{n}$  y que, además,  $(\forall i \in \{0, \dots, n\}) x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ .

**Ejemplo:** Sean  $I = [0, 1]$  y su partición  $P = P_4$  dada en el ejemplo anterior, y  $f(x) = e^x$ . Tenemos:

- $\Delta x_i = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$
- $m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} e^x = e^{x_{i-1}} = e^{\frac{i-1}{n}}$
- $M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} e^x = e^{x_i} = e^{\frac{i}{n}}$

Luego,

$$s(f, P_4) = \sum_{i=1}^n e^{\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$S(f, P_4) = \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

Una propiedad muy natural es que, independientemente de la partición escogida, se tiene

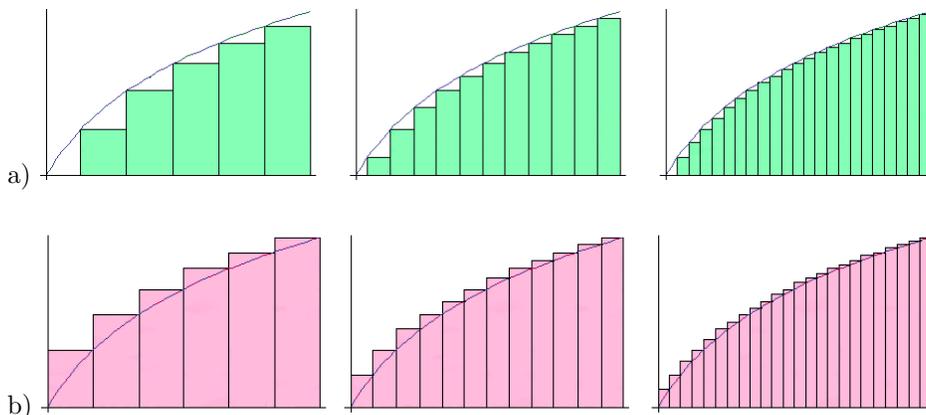
$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

donde  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  y  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Otra propiedad importante es que, para cualquier partición  $P$ , si  $P \preceq Q$ , entonces

$$s(f, P) \leq s(f, Q)$$

$$S(f, P) \geq S(f, Q)$$



Refinamiento de una suma inferior (a) y superior (b)

Lo anterior puede demostrarse sin mayor dificultad, por lo que queda como ejercicio. Sin embargo, es más interesante lo siguiente:

**Proposición 2:** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función, con  $I = [a, b]$ . Se tiene que

$$(\forall P, Q \in \mathcal{P}_I) \quad s(f, P) \leq S(f, Q)$$

**Dem.:** No importa cómo sean  $P$  y  $Q$ , sabemos que  $P \cup Q$  debe ser más fina que ambas. Por las propiedades mencionadas anteriormente, se tiene

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$$



Es natural preguntarse de qué sirve esta proposición, y en qué medida es más importante que las dos propiedades anteriores. La verdad es que este resultado es vital, ya que nos dice que si tomamos cualquier sucesión de particiones  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $P_n \prec P_{n+1}$  (cada partición en la sucesión es estrictamente más fina que su predecesora), entonces **toda** sucesión de sumas inferiores  $s(f, P_n)$  es creciente y acotada superiormente, y **toda** sucesión de sumas superiores  $S(f, P_n)$  es decreciente y acotada inferiormente, luego estas dos cantidades deben converger a un número real (no necesariamente convergen al mismo). La única sutileza que hay que cuidar insistentemente, es que  $f$  sea acotada en  $[a, b]$ . Dicho esto, sabemos que existen el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores, que podemos denotar

$$\int_{-a}^b f = \sup_{P \in \mathcal{P}_I} s(f, P)$$

$$\int_a^{-b} f = \inf_{P \in \mathcal{P}_I} S(f, P)$$

**Observación:** Siempre se cumple que  $\int_{-a}^b f \leq \int_a^{-b} f$ .

**Definición 5:** Diremos que  $f$ , acotada en el intervalo  $I = [a, b]$ , es Riemann-integrable en  $I$  si

$$\int_{-a}^b f = \int_a^{-b} f$$

A partir de esto, si  $f$  es Riemann-integrable en  $I$ , podemos definir unívocamente la integral definida como

$$\int_I f = \int_a^b f = \sup_{P \in \mathcal{P}_I} s(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}_I} S(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

Esta última expresión es conocida como notación de Leibnitz.

**Observación:** Por la observación anterior, para que  $f$  sea Riemann-integrable basta que se cumpla  $\int_{-a}^b f \geq \int_a^{-b} f$ .

Además, si  $f$  es Riemann-integrable,  $\int_I f$  es el único número que satisface

$$(\forall P \in \mathcal{P}_I) \quad s(f, P) \leq \int_I f \leq S(f, P)$$

Finalmente, si la partición es equitativa, es equivalente considerar el supremo y el ínfimo de una suma como el límite cuando  $n$  (el tamaño de la partición) tiende a infinito. Es decir, si sólo consideramos  $\mathcal{P}_I^R \subset \mathcal{P}_I$  el conjunto de particiones equidistantes, tenemos que

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_I^R} s(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P)$$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_I^R} S(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P)$$

**Ejemplo:** Notemos que en el ejemplo anterior,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_I^R} s(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - 1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = e - 1$$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_I^R} S(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = e - 1$$

Ambos resultados coinciden, por lo tanto  $f(x) = e^x$  es integrable en  $[0, 1]$ , y podemos decir sin equivocarnos que

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Para concluir esta sección, daremos el resultado clave para asegurar que el área bajo una curva existe y tiene un valor determinado (sin necesidad de aproximarla iterativamente).

**Proposición 3 (Condición de Riemann):** Una función  $f$  acotada sobre un intervalo  $I = [a, b]$  es Riemann-integrable en  $I$  si, y sólo si,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists P \in \mathcal{P}_I) \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

**Dem.:**

$\Rightarrow$ ) Como  $f$  es integrable, existe  $\int_I f$ , y podemos escoger dos particiones,  $P$  y  $Q$ , tales que

$$\int_I f - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad S(f, Q) - \int_I f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando  $K = P \cup Q$ , que es más fina que ambas particiones originales, lo anterior queda

$$\int_I f - s(f, K) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad S(f, K) - \int_I f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y sumando ambos resultados,

$$S(f, K) - s(f, K) \leq \varepsilon$$

$\Leftarrow$ ) Sabemos que para cualquier partición  $P$

$$s(f, P) \leq \int_I f \leq \overline{\int_I f} \leq S(f, P)$$

Necesitamos que  $\overline{\int_I f} = \int_I f$ , es decir,  $\overline{\int_I f} - \int_I f \leq \varepsilon$ . Para ver que esto es cierto, basta usar la desigualdad anterior; como  $f$  satisface la condición de Riemann,

$$(\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}_I) \quad S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Luego tenemos que

$$\overline{\int_I f} - \int_I f \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

■

**Ejemplo:** Se define la función de Dirichlet como

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es claro que  $D(x)$  no es Riemann-integrable en ningún intervalo  $[a, b]$ , y la prueba está en que la suma inferior siempre es 0, mientras que la superior es  $b - a$ , para cualquier partición.

### 5.3. Generalización de integral: volumen e hipervolumen

Trabajaremos dos situaciones en apariencia distintas: el caso en que tengamos un campo escalar  $f$  cuyo dominio esté en  $\mathbb{R}^2$ , y el caso en que el campo escalar tenga dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Como veremos, el segundo caso generalizará al primero y a cualquier otro. Además, lo visto previamente servirá para construir las mismas ideas, haciendo del problema de dimensionalidad una mera sutileza.

5.3.1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 

Las funciones que responden a esta estructura toman como argumento puntos en el plano real, que luego transforman en otro número real. En concreto, las funciones de este tipo pueden visualizarse como mantos en el espacio tridimensional, por lo que uno podría estar sumamente interesado en calcular el área de dichos mantos, o bien el volumen contenido entre una región del plano y la imagen de dicha región vía la función.

Calcularemos primero el volumen bajo un manto (nos referiremos a manto como el símil bidimensional de curva), puesto que se adapta a la misma noción que usamos al definir las sumas de Riemann. En esta ocasión, reemplazaremos el concepto de intervalo por el de rectángulo.

**Definición 6:** Se define un rectángulo en el plano como el conjunto

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

**Observación:** Si los intervalos fueran abiertos por izquierda y derecha, hablaríamos de un rectángulo abierto.

Estamos interesados en funciones que estén bien definidas en un determinado rectángulo, es decir, que sean acotadas. Nuevamente, necesitamos nuestra lista de axiomas para poder construir una teoría consistente con lo que haremos, algo similar a lo que hicimos en la primera parte de este capítulo. Denotemos por  $\mathcal{R}$  una región en el espacio, y digamos que  $V(\mathcal{R})$  es un número real que representa el volumen que contiene.

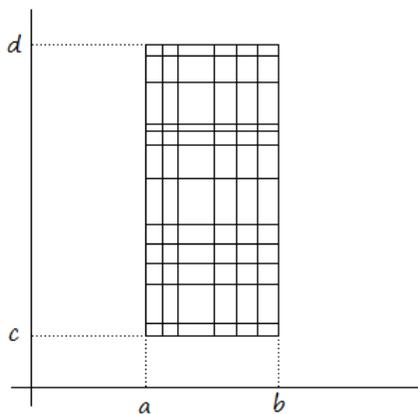
- $(\forall \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3) \quad V(\mathcal{R}) \geq 0$
- $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset \Rightarrow V(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = V(\mathcal{R}_1) + V(\mathcal{R}_2)$
- Si  $\mathcal{R}$  es un prisma, es decir,  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , entonces  $V(\mathcal{R}) = (b - a) \cdot (d - c) \cdot (f - e)$

**Proposición 4:**  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \Rightarrow V(\mathcal{R}_1) \leq V(\mathcal{R}_2)$

**Dem.:** Queda como ejercicio.

**Definición 7:** Se define una partición del rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  como

$$P(R) = \{(x_i, y_j) \in R \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d\}$$



Possible partición de un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$

Notemos que, como resultado de la partición, necesariamente se tiene que el rectángulo original se divide en subrectángulos cuya unión es el mismo rectángulo, esto es

$$R = \left( \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \right) \times \left( \bigcup_{j=1}^m [y_{j-1}, y_j] \right)$$

Además, cada subrectángulo puede anotarse como  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , de forma que  $R = \bigcup_{i,j} R_{ij}$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}_R$  al conjunto de todas las particiones sobre el rectángulo  $R$ .

**Definición 8:** Dada una partición  $P$ , decimos que una partición  $Q$  es más fina que  $P$  si  $P \subseteq Q$ .

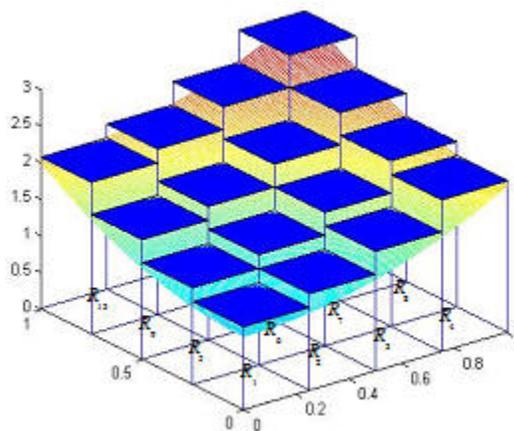
**Definición 9:** Sea  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R = [a, b] \times [c, d]$ ,  $P$  una partición sobre dicho rectángulo y  $R_{ij}$  cada subrectángulo resultante de esta partición. Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, es conveniente definir las cantidades

- $A(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$
- $m_{ij}(f) = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$
- $M_{ij}(f) = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$

De esta forma, definimos las sumas inferior y superior de  $f$  con respecto a  $P$  como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(f) \cdot A(R_{ij})$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(f) \cdot A(R_{ij})$$



Elementos de la suma superior de una función escalar de dos variables

Podemos mencionar varias propiedades, basadas en los mismos argumentos expuestos anteriormente. Así, es claro que, para cualquier partición, en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)(d-c)$$

donde  $m = \inf_{(x,y) \in R} f(x, y)$  y  $M = \sup_{(x,y) \in R} f(x, y)$ .

Además, si tenemos dos particiones  $P$  y  $Q$  tales que  $P \subseteq Q$

$$s(f, P) \leq s(f, Q)$$

$$S(f, P) \geq S(f, Q)$$

De esto se desprende la importante propiedad

$$(\forall P, Q \in \mathcal{P}_R) \quad s(f, P) \leq S(f, Q)$$

Luego, se definen las cantidades (las cuales existen por el argumento esgrimido con anterioridad)

$$\begin{aligned}\underline{\iint}_R f &= \int_a^b \int_c^d f = \sup_{P \in \mathcal{P}_R} s(f, P) \\ \overline{\iint}_R f &= \int_a^b \int_c^d f = \inf_{P \in \mathcal{P}_R} S(f, P)\end{aligned}$$

**Definición 10:** Diremos que  $f$ , definida en el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , es Riemann-integrable en  $R$  si

$$\underline{\iint}_R f = \overline{\iint}_R f$$

La proposición 3, llamada Condición de Riemann, sigue siendo válida. Si  $f$  es Riemann-integrable, definimos sin ambigüedad la integral sobre el rectángulo  $R$  como cualquiera de las cantidades anteriores (como coinciden, da igual cuál se escriba), y se denota de manera equivalente

$$\int_a^b \int_c^d f \, dA = \iint_R f \, dA$$

donde  $dA$  es llamado diferencial de área, que representa las variables con respecto a las que integramos. En el caso usual,  $dA = dx dy$  o bien  $dA = dy dx$  (aprenderemos qué importancia tiene el orden), pero también veremos que, dependiendo de la función, podría ser más conveniente representarla con coordenadas polares, en cuyo caso habrá que considerar otro diferencial de área que se adecúe a tal modelo. También es importante destacar que el nombre se relaciona con área en el sentido de que la región sobre la que se integra es plana, por lo que evoca la idea de superficie. Similarmente, si integráramos sobre una región tridimensional, hablaríamos de diferencial de volumen. Sin embargo, a partir de cuatro dimensiones, estos nombres no hacen referencia a algo conocido, por lo que habrá que abstraerse de las nociones físicas y acostumbrarse a trabajar con las definiciones y propiedades de este objeto.

### 5.3.2. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Al terminar esta sección manejaremos los elementos básicos para definir bien una integral para cualquier valor de  $n$ , aunque los casos más usuales son  $n = 1, 2$  y  $3$ . Definiremos un par de conceptos nuevos, que no se tratarán con estricto rigor, sino más bien nos darán ideas apprehensibles y fáciles de entender de lo que está ocurriendo.

**Definición 11:** Se define un rectángulo  $n$ -dimensional, o simplemente rectángulo, al conjunto

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i = 1, \dots, n) \, a_i \leq x_i \leq b_i \}$$

Si los intervalos son abiertos, hablamos de un rectángulo abierto.

Queremos generalizar la noción de área y aún más de volumen, a algo que podemos llamar hipervolumen. Sin embargo, el nombre en sí no aporta información relevante, pues aplica para cualquier valor de  $n \geq 4$ . En lugar de calcular estas magnitudes, distinguiendo nombres por dimensión, simplemente definiremos la llamada medida de Lebesgue de una región  $R$  (que denotamos  $\lambda(R)$ ) como una generalización de longitud, área, volumen, etc.

**Definición 12:** Para un número finito  $n \in \mathbb{N}$ , y para un rectángulo cualquiera, definimos su medida de Lebesgue como

$$\lambda(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Además, consideraremos la medida de Lebesgue de un conjunto numerable como nula. Esto se adapta a la idea de que la integral sobre una cantidad finita de puntos es simplemente nula, extendiendo la finitud a numerabilidad.

Luego, las propiedades inherentes de esta definición generalizan las que ya vimos, esta vez para  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ :

- $\lambda(\mathcal{R}) \geq 0$
- $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset \implies \lambda(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = \lambda(\mathcal{R}_1) + \lambda(\mathcal{R}_2)$
- La propiedad relativa a la medida de Lebesgue de un rectángulo viene dada por la definición misma.

Además, de lo anterior se desprende el resultado (cuya demostración queda como ejercicio)

**Proposición 5:**  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \implies \lambda(\mathcal{R}_1) \leq \lambda(\mathcal{R}_2)$

**Definición 13:** Se define una partición del rectángulo  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  como

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$$

donde  $P_i$  es una partición del intervalo  $[a_i, b_i]$ . La notación puede tornarse complicada a la hora de representar la partición por completo, pero vale la pena recordar que  $P_i = \{a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_{m_i}^{(i)} = b_i\}$ , y que esto define  $n$  particiones (pues  $i = 1, \dots, n$ ), determinados cada uno por  $m_i$  puntos (pues cada intervalo lo podemos dividir en distintas cantidades de partes). A su vez, la unión de estos subintervalos genera el intervalo original, por lo que

$$R = \left( \bigcup_{j=1}^{m_1} [x_{j-1}^{(1)}, x_j^{(1)}] \right) \times \left( \bigcup_{j=1}^{m_2} [x_{j-1}^{(2)}, x_j^{(2)}] \right) \times \cdots \times \left( \bigcup_{j=1}^{m_n} [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}] \right)$$

Queda como ejercicio personal convencerse de que podemos representar cada subrectángulo como

$$R_{j_1 j_2 \dots j_n} = [x_{j_1-1}^{(1)}, x_{j_1}^{(1)}] \times [x_{j_2-1}^{(2)}, x_{j_2}^{(2)}] \times \cdots \times [x_{j_n-1}^{(n)}, x_{j_n}^{(n)}] \quad j_i = 1, \dots, m_i$$

Denotamos por  $\mathcal{P}_R$  al conjunto de todas las particiones sobre  $R$ .

**Observación:** Es importante notar que

$$\sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \sum_{j_1 \dots j_n} \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \lambda(R)$$

**Definición 14:** Sean  $P, Q \in \mathcal{P}_R$ . Diremos que  $Q$  es más fina que  $P$  si  $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) P_i \subseteq Q_i$

**Definición 15:** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada sobre el rectángulo  $R$ ,  $P \in \mathcal{P}_R$  y  $R_{j_1 \dots j_n}$  un subrectángulo resultante de esta partición. Consideremos las cantidades

- $\lambda(R_{j_1 \dots j_n}) = \prod_{i=1}^n (x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)})$
- $m_{j_1 \dots j_n}(f) = \inf \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in R_{j_1 \dots j_n} \}$
- $M_{j_1 \dots j_n}(f) = \sup \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in R_{j_1 \dots j_n} \}$

Luego, se definen las sumas inferior y superior de  $f$  en  $R$  con respecto a  $P$  como

$$s(f, P) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} m_{j_1 j_2 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \sum_{j_1 \dots j_n} m_{j_1 j_2 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n})$$

$$S(f, P) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} M_{j_1 j_2 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \sum_{j_1 \dots j_n} M_{j_1 j_2 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 j_2 \dots j_n})$$

Queda como ejercicio plantear una generalización (donde corresponda) de las propiedades y proposición vistas antes. Para terminar, denotamos

$$\overline{\iint \dots \int_{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n} f} = \sup_{P \in \mathcal{P}_R} s(f, P)$$

$$\underline{\iint \dots \int_{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n} f} = \inf_{P \in \mathcal{P}_R} S(f, P)$$

**Definición 16:** Diremos que  $f$  es Riemann integrable si las cantidades anteriores son iguales, en cuyo caso, cualquiera de esas dos expresiones equivale a

$$\iint \dots \int_{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n} f dR = \int_R f dR$$

Notemos que usamos  $R$  y  $dR$ , básicamente porque representa de forma compacta todas las variables que modelan el rectángulo sobre el que integramos.

Para finalizar la introducción, daremos el resultado que nos permitirá desarrollar más teoría sin estancarnos en la duda sobre la integrabilidad de ciertas funciones.

**Proposición 6:** Una función  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $R$  un rectángulo, es integrable sobre  $R$ .

**Dem.:** Primero notemos (puede, como ejercicio, probar la siguiente afirmación) que, como  $f$  es continua sobre un compacto, alcanza máximo y mínimo en él, los alcanza en cada subrectángulo, y además es uniformemente continua en dicha región. Por lo tanto, dado un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe un  $\delta > 0$  tal que

$$(\forall x_1, x_2 \in R) \|x_1 - x_2\| \leq \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(R)}$$

Consideremos una partición  $P \in \mathcal{P}_R$  tal que  $|P_i| \leq \delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Como  $f$  alcanza mínimos y máximos en cada subrectángulo, podemos asegurar que

$$(\exists x'_j \in R_{j_1 \dots j_n}) f(x'_j) = \inf\{f(x) \mid x \in R_{j_1 \dots j_n}\}$$

$$(\exists x''_j \in R_{j_1 \dots j_n}) f(x''_j) = \sup\{f(x) \mid x \in R_{j_1 \dots j_n}\}$$

Luego,

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{j_1 \dots j_n} [M_{j_1 \dots j_n} - m_{j_1 \dots j_n}] \cdot \lambda(R_{j_1 \dots j_n})$$

$$= \sum_{j_1 \dots j_n} [f(x''_j) - f(x'_j)] \cdot \lambda(R_{j_1 \dots j_n})$$

Es claro que  $\|x''_j - x'_j\| \leq \lambda(R_{j_1 \dots j_n}) \leq \delta$ , pues cada intervalo que compone al rectángulo tiene largo menor que  $\delta$ . Finalmente, teníamos que la función es uniformemente continua, cumpliéndose la proposición

$$\|x''_j - x'_j\| \leq \delta \implies |f(x''_j) - f(x'_j)| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(R)}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{j_1 \dots j_n} [f(x''_j) - f(x'_j)] \cdot \lambda(R_{j_1 \dots j_n}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\lambda(R)} \sum_{j_1 \dots j_n} \lambda(R_{j_1 \dots j_n}) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

■

**Proposición 7:** Si  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es integrable en el rectángulo  $A$  y  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $h \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $A$ .

Desde ahora, trabajaremos con funciones que cumplan la hipótesis de ser integrables. Sin embargo, es buen ejercicio corroborarlo antes de iniciar cualquier incursión. En este contexto, sabemos que la integral (así hemos llamado al límite de las sumas de Riemann) existe, y que es un operador que transforma funciones en valores reales. De momento no hemos mencionado cómo calcular la integral de una función de varias variables (que también podemos llamar integral múltiple), pero de la definición y propiedades que dimos de las sumas, se desprende lo siguiente.

**Teorema 1:** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo y  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables en  $A$ .

1.  $f + g$  también es integrable, y  $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$
2. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f$  también es integrable, y  $\int_A (\alpha f) = \alpha \int_A f$
3. Si  $f \geq 0$ , entonces  $\int_A f \geq 0$
4. Si  $f \geq g$ , entonces  $\int_A f \geq \int_A g$
5.  $|f|$  también es integrable, y  $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$
6.  $\max\{f, g\}$  y  $\min\{f, g\}$  también son integrables
7.  $f^2$  también es integrable
8. El producto  $fg$  también es integrable

**Teorema 2:** Sean  $D \subset \mathbb{R}^2$  un rectángulo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $D$ .

1.  $\text{Área}(D) = \iint_D 1 dx dy$
2.  $(\exists m, M \in \mathbb{R}) (\forall (x, y) \in D) m \leq f(x, y) \leq M \implies m \cdot \text{Área}(D) \leq \iint_D f \leq M \cdot \text{Área}(D)$
3.  $D = D_1 \cup D_2 \wedge D_1 \cap D_2 = \emptyset \implies \iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$
4.  $f$  continua en  $D \implies (\exists (x^*, y^*) \in D) \iint_D f = f(x^*, y^*) \cdot \text{Área}(D)$

**Dem.:** Queda como ejercicio.

**Observación:** La propiedad 4 del Teorema 2, es precisamente el Teorema del Valor Medio para integrales.

## 5.4. Cálculo de integrales dobles

### 5.4.1. Integrales sobre rectángulos

En esta sección aprenderemos a calcular, cuando existan, las integrales sobre regiones  $n$ -dimensionales, aunque por simplicidad de notación nos restringiremos al caso  $n = 2$ ; no es difícil extender los resultados que veremos a dimensiones mayores. Además, cuando hablemos de integrales para funciones de una variable, nos referiremos a las integrales definidas vistas en el curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Lo primero que hay que dejar claro, es que el orden en que se pongan los diferenciales es relevante, al punto que hay que asignarles el orden establecido por los signos integrales. Cuando hagamos esa distinción, estaremos hablando de integrales iteradas (una integral múltiple en que se distinga un signo integral de otro). Así, si queremos calcular la integral cuando  $x \in [a, b]$  e  $y \in [c, d]$ , podemos hacerlo

- así:  $\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx$
- o así:  $\int_c^d \int_a^b f \, dx \, dy$

pero no en distinto orden; en otras palabras, los diferenciales se ubican en el orden inverso de los signos integrales según corresponda el intervalo al cual pertenezca cada variable. Una forma clara de verlo, es usando paréntesis:

$$\int_a^b \left( \int_c^d f \, dy \right) dx \quad \int_c^d \left( \int_a^b f \, dx \right) dy$$

Supongamos que tenemos una función  $f$ , integrable en un rectángulo  $A = [a, b] \times [c, d]$ , y queremos calcular la integral sobre dicho rectángulo. Hay dos posibilidades:

Caso 1: Queremos calcular  $\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$ . Definiendo  $\Psi(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$ , tenemos

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \Psi(y) \, dy$$

Caso 2: Queremos calcular  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$ . Definiendo  $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$ , tenemos

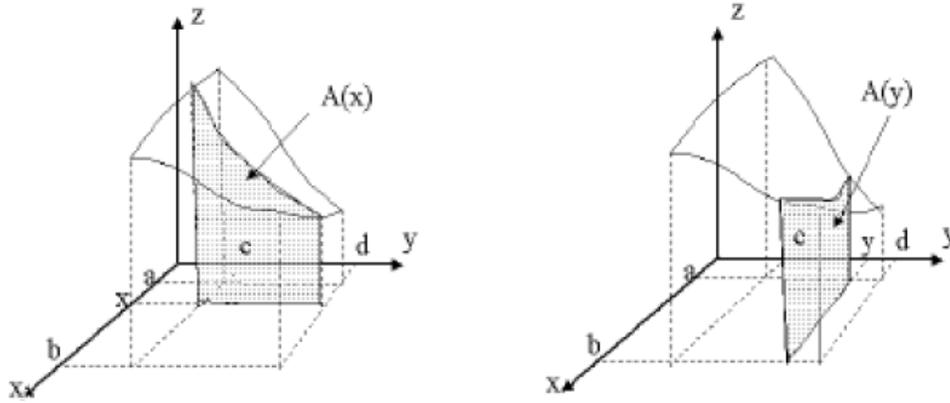
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \Phi(x) \, dx$$

¿Qué podemos decir de estas dos integrales? ¿Importa el orden en que integremos?

**Teorema 2 (Teorema de Fubini):** Sean  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rectángulo y  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann-integrable en dicha región. Se tiene que

$$(\forall x \in [a, b]) \Phi(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy < \infty \implies \iint_R f \, dR = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

Lo mismo sucede si reemplazamos  $\Phi(x)$  por  $\Psi(y)$  como lo definimos con anterioridad.



El teorema de Fubini nos dice que el volumen de una función integrable no depende de cómo se barre el rectángulo.

**Dem.:** Sea  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Necesitamos que  $\Phi$  sea integrable en  $[a, b]$  y que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \Phi(x) dx$$

Sean  $P_x \in \mathcal{P}_{[a, b]}$  una partición que defina los subintervalos  $G_i = [x_{i-1}, x_i]$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y  $P_y \in \mathcal{P}_{[c, d]}$  otra partición que defina los subintervalos  $H_j = [y_{j-1}, y_j]$ , con  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Luego, tenemos para el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  la partición  $P \in \mathcal{P}_R$ , que define los subrectángulos  $R_{ij} = G_i \times H_j$ . Tenemos entonces que

$$s(f, P) = \sum_{i, j} m_{ij}(f) \cdot A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m m_{ij}(f) \cdot \Delta y_j \right) \cdot \Delta x_i$$

Además, para cada  $x \in G_i$  y para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  se tiene que  $m_{ij}(f) \leq m_j(f_x)$ , pues el primer término es el ínfimo sobre todo el subrectángulo, mientras que el segundo es el ínfimo al fijar una coordenada  $x \in G_i$ . Sumando sobre  $j$ , se tiene que

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(f) \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m m_j(f_x) \Delta y_j \leq \int_c^d f_x(y) dy = \Phi(x)$$

Como estas desigualdades valen para todo  $x \in G_i$ , tomamos ínfimo en  $x$ , lo que da

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(f) \Delta y_j \leq m_i(\Phi)$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sumando sobre  $i$ , obtenemos

$$s(f, P) \leq s(\Phi, P_x) \leq S(\Phi, P_x) \leq S(f, P)$$

Como esto vale para cualquier partición de  $P$  de  $R$  (por ende, para cualquier partición  $P_x$  de  $[a, b]$  y  $P_y$  de  $[c, d]$ ) y  $f$  es integrable, se deduce de estas desigualdades que  $\Phi$  es integrable sobre  $[a, b]$ , y

$$\iint_R f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x) dx$$

La demostración es análoga si establecemos la existencia de  $\Psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , con lo que obtendríamos la integral en el orden inverso.

Como todo en Cálculo, se tiene que  $f$  es integrable en el rectángulo, o que la integral doble de  $f$  existe, sólo si ambos resultados coinciden, pero por hipótesis  $f$  es Riemann-integrable, por lo que concluimos que éste último también se satisface.



**Ejemplos:** Veamos distintos casos en que podemos o no aplicar el teorema de Fubini.

- Calcular  $\iint_R x^2 + y^2 dA$ , donde  $R = [0, 1] \times [1, 2]$

$$\begin{aligned}
 \iint_R x^2 + y^2 dA &= \int_1^2 \int_0^1 x^2 + y^2 dx dy \\
 &= \int_1^2 \left( \int_0^1 x^2 + y^2 dx \right) dy \\
 &= \int_1^2 \left( \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dx \right) dy \\
 &= \int_1^2 \left( \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + y^2 x \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{3} + y^2 dy \\
 &= \frac{1}{3} y \Big|_1^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 dy \\
 &= \frac{1}{3} (2 - 1) + \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Queda como ejercicio demostrar que las condiciones para usar el teorema de Fubini se cumplen, y verificar que ambas integrales coinciden.

- Sea  $f : [-1, 1] \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x \cos(y)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_{-1}^1 x \cos(y) dx dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \cos(y) dy \\
 &= \int_0^\infty 0 \cdot \cos(y) dy \\
 &= \int_0^\infty 0 dy \\
 &= 0 \\
 \\
 \int_{-1}^1 \int_0^\infty f(x, y) dy dx &= \int_{-1}^1 \int_0^\infty x \cdot \cos(y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \cdot \cos(y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 x \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(y) \Big|_0^t dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(t) \\
 &= 0 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene por tener el producto entre un límite acotado y un término nulo. Por lo tanto, ambas integrales dobles existen y son iguales. Sin embargo, una de las integrales no:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty x \cdot \cos(y) dy = x \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(t)$$

Claramente,  $\Phi$  está bien definida únicamente para  $x = 0$ . Por lo que el recíproco del teorema no es cierto (que la existencia de la integral doble implique que cada integral simple exista).

- Sea  $f : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x & , y \notin \mathbb{Q} \\ 0 & , y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Vemos que  $\Psi(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx = \int_{-1}^1 2x dx = 0$ , por lo que

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

Sin embargo,  $\Phi(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$  no existe, pues con respecto a  $y$  se nos presenta el problema relacionado a la función de Dirichlet. De ese modo, no podemos calcular

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

Concluimos que  $f$  no satisface el teorema de Fubini (que las integrales iteradas coincidan) y, por contrarrecíproca,  $f$  no puede ser integrable. Sin embargo, hagamos un pequeño ejercicio aparte. Definimos las funciones

$$\begin{aligned} \Phi_{inf}(x) &= \int_0^1 f(x, y) dy = 0 & \Phi_{sup}(x) &= \int_0^1 f(x, y) dy = 2x \\ \Psi_{inf}(y) &= \int_{-1}^1 f(x, y) dx = 0 & \Psi_{sup}(y) &= \int_{-1}^1 f(x, y) dx = 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que todas ellas son continuas, y por lo tanto integrables. Pero no sólo eso; la integral de  $\Phi_{inf}$  y  $\Phi_{sup}$  sobre  $[0, 1]$  es 0, al igual que la integral de  $\Psi_{inf}$  y  $\Psi_{sup}$  sobre  $[-1, 1]$ . ¿Es eso coincidencia?

**Corolario 1 (Teorema de Fubini generalizado):** Sean  $A = [a, b] \times [c, d]$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada e integrable en  $A$ . Para cada  $x \in [a, b]$ , sea  $g_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g_x(y) = f(x, y)$ . Consideremos las funciones

$$L(x) = \int_c^d g_x(y) dy \quad U(x) = \int_c^d g_x(y) dy$$

Sabemos por una observación que estas cantidades siempre existen. Entonces, las funciones  $L(x)$  y  $U(x)$  son integrables en  $[a, b]$ , y

$$\int_a^b L(x) dx = \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b U(x) dx$$

Esto es análogo definiendo en  $[c, d]$ , y de forma similar,  $L(y)$  y  $U(y)$ . La demostración se basa en la misma que dimos para el teorema de Fubini.

**Ejercicio:** Verificar el resultado anterior para la función  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

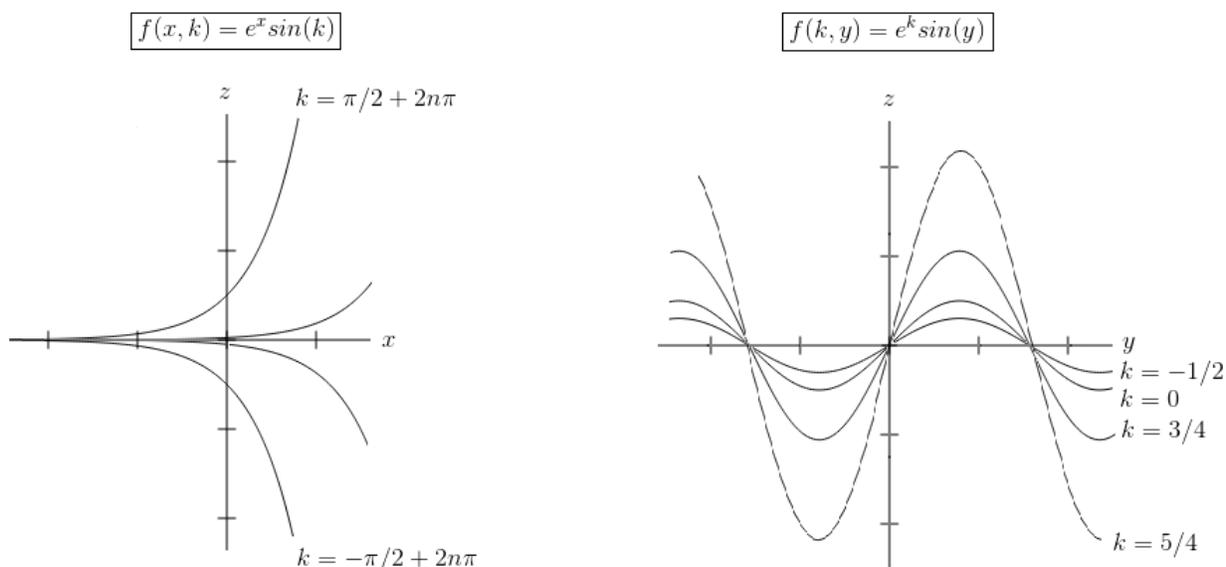
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \notin \mathbb{Q}^2 \cup \{(0, 1)\} \cup \{(1, 0)\} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q} & x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q}, \text{ con } (m, n) \text{ y } (p, q) \text{ primos relativos} \end{cases}$$

**Corolario 2 (Funciones separables):** Sea  $f$  una función integrable sobre un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  y tal que  $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x, y) = g(x)h(y)$  (en ese caso, decimos que  $f$  es una función separable). Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \left( \int_c^d h(y) dy \right)$$

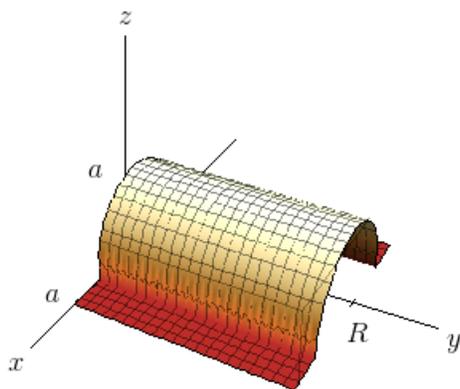
Las funciones separables son muy fáciles de manejar a la hora de integrar, pues hace intuitiva la forma que adquiere su gráfica, permitiéndonos calcular áreas y volúmenes sin realizar cálculos complicados, más aún cuando  $f(x, y)$  es en realidad una función de una sola variable (pues se puede anotar  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ , por ejemplo). Sin profundizar mucho, las secciones transversales en los ejes muestran el comportamiento de cada parte de la función como curvas de nivel, como vemos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo:** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ . Ya vemos que  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ , con  $g(x) = e^x$  y  $h(y) = \sin(y)$ . No calcularemos integrales, pero veremos a qué nos referíamos con lo simple que es visualizar las curvas de nivel de  $f$  en los planos  $XZ$  y  $YZ$ .



**Ejemplo:** Sea  $f : [-a, a] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$  con  $R > 0$ .

Queremos calcular la integral doble de  $f$  en su dominio (es decir, el volumen contenido entre el plano y la gráfica de  $f$ ). Se puede calcular sin mayor dificultad usando técnicas de integración ya aprendidas, pero también podemos notar que  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ , con  $g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  y  $h(y) = 1$ . Es decir, conforme se avanza en el eje  $Y$ , las curvas de nivel de  $f$  en el plano  $XZ$  no varían. De hecho, éstas describen un semicírculo de radio  $a$ .



Luego, como

$$\Psi(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1-x^2} dx$$

es el área del semicírculo, al integrar  $\Psi(y)$  sobre  $[0, R]$  obtendremos el volumen de medio cilindro de largo  $R$  y radio  $a$ .

Finalmente, el resultado es  $\frac{\pi a^2 R}{2}$ .

Como consecuencia del teorema de Fubini, dadas las condiciones necesarias, podemos integrar sin preocuparnos por el orden en que lo hagamos (respetando la correspondencia intervalo-diferencial). Además, se evidencia que no tiene sentido el cálculo de primitivas o integrales indefinidas cuando se trata de integrales múltiples, y que todo se reduce a un problema numérico. No está de más advertir, no obstante, que el procedimiento usual de cálculo es *desde dentro hacia afuera*, es decir, se resuelve la integral cuyo diferencial esté en primer lugar de la misma forma en que calculamos una integral ordinaria, y se sigue en ese orden, hasta llegar al último diferencial.

Hemos dicho que el cálculo de integrales dobles tiene relación con el cálculo del volumen comprendido entre el grafo de una función y el plano  $XY$ , acotado por el rectángulo  $R$ . En ese sentido, el enunciado del ejemplo anterior pudo ser “Calcular el volumen contenido bajo el grafo de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el rectángulo  $R = [0, 1] \times [1, 2]$ ”, y habría sido completamente equivalente a lo resuelto, con la única salvedad que, eventualmente,  $f$  puede ser negativa, en cuyo caso para obtener volumen la integral a calcular no es sobre  $f$ , sino sobre  $|f|$ .

### 5.4.2. Integrales sobre conjuntos más generales

Todo lo que hemos hecho hasta ahora, es calcular integrales sobre rectángulos, y deberíamos ser capaces de integrar sobre uniones, intersecciones y combinaciones de éstas operaciones aplicadas a rectángulos. Sin embargo, no hemos tocado el tema de integrar sobre triángulos, círculos y otros conjuntos mucho más complejos. Debemos definir formalmente una función cuyo valor depende del conjunto al que pertenece el argumento.

**Definición 17:** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado. Se define la función indicatriz o indicadora con respecto a  $A$  como

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A \end{cases}$$

**Definición 18:** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Se define la integral de  $f$  sobre  $A$  como

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) \cdot \chi_A(x, y) dx dy$$

donde  $R$  es cualquier rectángulo que contiene a  $A$ . Veamos que esta definición está bien establecida:

Sean  $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  tales que  $A \subseteq R_1$  y  $A \subseteq R_2$  ( $R_1$  y  $R_2$  no necesariamente son iguales). Entonces se tiene que  $R_1 = (R_1 \setminus A) \dot{\cup} A$  y  $R_2 = (R_2 \setminus A) \dot{\cup} A$ . Luego

$$\begin{aligned} \int_{R_1} f \cdot \chi_A &= \int_{R_1 \setminus A} f \cdot \chi_A + \int_A f \cdot \chi_A \\ &= \int_A f \cdot \chi_A \\ \int_{R_2} f \cdot \chi_A &= \int_{R_2 \setminus A} f \cdot \chi_A + \int_A f \cdot \chi_A \\ &= \int_A f \cdot \chi_A \end{aligned}$$

Esto se tiene porque  $\chi_A(R_1 \setminus A) = \chi_A(R_2 \setminus A) = \{0\}$ .

Por lo tanto, la integral está bien definida, pues no depende del rectángulo que escojamos, siempre que éste contenga a  $A$ . Más generalmente, se tiene que está bien definida si escogemos  $R$  cualquier región (no necesariamente rectangular) que contenga a  $A$ , y la demostración es completamente idéntica a la anterior.

**Observación:** Como se pasa de un conjunto cualquiera a un rectángulo que lo contiene, las propiedades como la linealidad se conservan.

Podemos ahorrar notación definiendo  $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ ; ahora buscaremos condiciones para que  $\tilde{f}$  sea integrable en el sentido dado anteriormente. Usualmente,  $f$  es continua, pero por lo general  $\tilde{f}$  no. Esto nos obliga a considerar otras propiedades más generales que la continuidad, aunque asumiremos que al menos  $f$  la satisface.

**Definición 19:** Se dice que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene contenido cero si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists U_1, \dots, U_m \text{ rectángulos cerrados}) \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^m \lambda(U_i) < \varepsilon$$

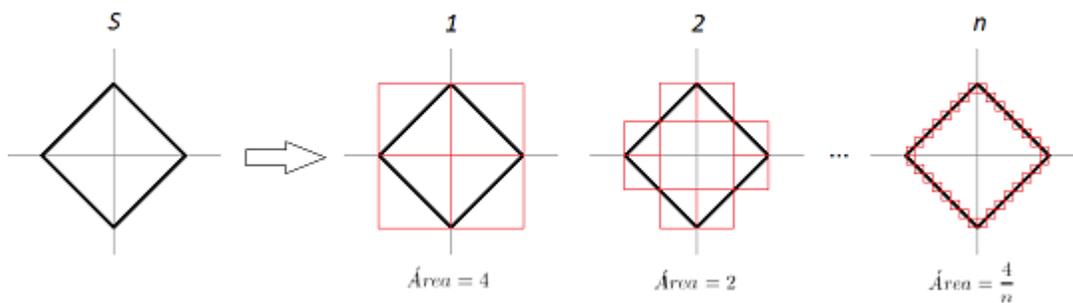
donde  $\lambda(U_i)$  denota la medida de Lebesgue del rectángulo  $U_i$  (volumen  $n$ -dimensional). También diremos que un conjunto que tiene contenido cero, es un conjunto de medida de Jordan nula.

**Proposición 8:** Se tiene

1. Si  $A$  es un conjunto de medida nula y  $B \subseteq A$ , entonces  $B$  también es de medida nula.
2. Si  $A$  y  $B$  son conjuntos de medida nula, entonces  $A \cup B$  también es de medida nula.
3. Denotando  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , si para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$   $A_i$  es numerable,  $A$  tiene es de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo:** Mostraremos tres casos en que queramos ver si algún conjunto es o no de medida nula. Es importante notar que, dependiendo de la dimensión del espacio, esto equivale a mostrar si el conjunto tiene longitud, área, volumen, etc.

- Demostremos que el conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  es de medida nula en  $\mathbb{R}^2$ .  
Para esto, podemos recubrir  $S$  con rectángulos (cuadrados) cuyos áreas disminuyen iterativamente, como ilustra la figura.



Así,  $S$  se puede encerrar en  $4n$  cuadrados cerrados, cada uno de área  $\frac{1}{n^2}$ . Luego, el área total del recubrimiento es  $\frac{4}{n}$ , el cual se puede hacer arbitrariamente pequeño. En resumen, tenemos que  $S$  es subconjunto de la unión finita de rectángulos cerrados y que la suma de sus medidas de Lebesgue (en este caso, área) es tan chica como queramos. Luego,  $S$  es de medida nula.

- Demostrar que, si  $a < b$ , entonces  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  no tiene contenido cero en  $\mathbb{R}$ .  
Lo que haremos será mostrar por inducción que, a partir de un recubrimiento finito de cerrados de  $[a, b]$ , digamos  $U_1, \dots, U_m$  tales que  $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$ , se tiene necesariamente que

$$\sum_{i=1}^m \lambda(U_i) \geq b - a$$

Es evidente que para  $m = 1$  se cumple, pues  $U_1 = [c, d]$  necesariamente debe ser tal que  $c \leq a$  y  $d \geq b$ , por lo que  $\lambda(U_1) = d - c \geq b - a$ .

Supongamos que esta propiedad se cumple para un recubrimiento de  $m$  intervalos cerrados,  $\{U_1, \dots, U_m\}$ , y consideremos ahora el conjunto  $\{U_1, \dots, U_m, U_{m+1}\}$ . Es claro que este conjunto es un recubrimiento finito de  $[a, b]$ , pues

$$\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i = \left( \bigcup_{i=1}^m U_i \right) \cup U_{m+1} \supseteq [a, b] \cup U_{m+1} \supseteq [a, b]$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $a \in U_1$ . Como  $U_1 = [\alpha, \beta]$ , entonces  $\alpha \leq a \leq \beta$ . Ahora, si  $b \leq \beta$ , se tiene que  $[a, b] \subseteq U_1$ , y la demostración termina. Si  $b > \beta$ , entonces  $\{U_2, \dots, U_{m+1}\}$  recubre a  $[\beta, b]$ , y por hipótesis inductiva,

$$\sum_{i=2}^{m+1} \lambda(U_i) \geq b - \beta$$

Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda(U_i) \geq (\beta - \alpha) + (b - \beta) = b - \alpha \geq b - a$$

■

- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Demostraremos que su gráfico, el conjunto  $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ , tiene contenido cero en  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es continua en el compacto  $[a, b]$ , es uniformemente continua en dicho intervalo. Luego, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

para todo  $x, y \in [a, b]$  tales que  $|x - y| < \delta$ . Sea  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$  tal que

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\} < \delta$$

Sean  $M_i$  y  $m_i$  el máximo y el mínimo de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , y sean  $c_i, c'_i$  tales que  $f(c_i) = M_i$  y  $f(c'_i) = m_i$ . Como

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad |c_i - c'_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta$$

tenemos que

$$M_i - m_i = |f(c_i) - f(c'_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Finalmente, los  $n$  rectángulos cerrados  $U_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$  recubren  $G$ , y además

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda(U_i) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b - a} \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Definición 20:** Diremos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible en el sentido de Jordan, Jordan-medible o simplemente medible si su frontera,  $\partial A$ , tiene contenido cero.

**Ejemplo:** El conjunto  $M_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  es medible en  $\mathbb{R}^2$ , mientras que  $M_{\mathbb{Q}} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$  no lo es.

A continuación, enunciamos el teorema que nos permitirá trabajar con integrales sobre conjuntos más generales.

**Teorema 3 (Teorema de Lebesgue):** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y continua, con  $A$  un conjunto acotado. Entonces la función  $\tilde{f} : R \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ , es Riemann-integrable si y sólo si  $A$  es Jordan-medible. En particular, si  $n = 2$ , el área de  $A$  está bien definida y se calcula como

$$\text{Área}(A) = \iint_I \chi_A dx dy$$

Lo que propone este teorema, es que el área de una región puede calcularse sobre otra región que la contenga, mediante una función que discrimina puntos dentro y fuera de la región de interés.

La demostración se dará en un apéndice, puesto que requiere cierta especialización sobre algunos conceptos que no se aborda por su dificultad y poca relevancia para el resto del curso.

La mayoría de los ejemplos que consideraremos en este curso corresponden a regiones Jordan-medibles, o uniones e intersecciones finitas de regiones de este tipo.

### 5.4.3. Integrales dobles sobre conjuntos generales

Hemos visto que la integral sobre un rectángulo (de cualquier dimensión) mediante integración reiterada y haciendo uso del teorema de Fubini. Ahora enfrentamos el problema de calcular integrales dobles sobre conjuntos medibles arbitrarios. Vamos a empezar considerando dos tipos de estos conjuntos para los que la integral doble puede calcularse por integración reiterada de una manera similar a la que hemos empleado en el caso de rectángulos.

**Definición 21:** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  se dice de tipo I o  $x$ -proyectable si es de la forma

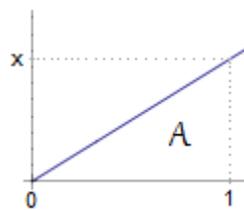
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

donde  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Las integrales sobre este tipo de conjuntos se calculan como

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Ejemplo:** Calcular la integral de  $f(x, y) = x + y^2$  sobre  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

$$\begin{aligned} \iint_A x + y^2 dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^x x + y^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x^2 + \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$



A como región tipo I

**Definición 22:** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  se dice de tipo II o  $y$ -proyectable si es de la forma

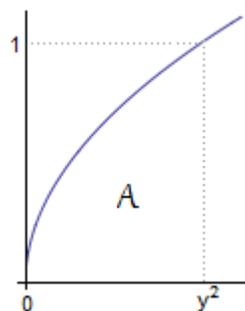
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

donde  $g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . Las integrales sobre este tipo de conjuntos se calculan como

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Ejemplo:** Calcular la integral de  $f(x, y) = xe^{y^5}$  sobre  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$ .

$$\begin{aligned} \iint_A xe^{y^5} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{y^2} xe^{y^5} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} e^{y^5} \right) \Big|_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^4}{2} e^{y^5} dy \\ &= \left( \frac{1}{10} e^{y^5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{e - 1}{10} \end{aligned}$$



A como región tipo II

**Observación:** El tipo del conjunto queda determinado por la forma de describirlo; en este sentido, dado un conjunto en el plano real, tenemos que buscar una forma de parametrizarlo. La justificación de esto la damos a continuación.

Además, puede haber conjuntos que sean simultáneamente de tipo I y de tipo II, en cuyo caso se dice que son de tipo III y se puede aplicar cualquiera de los dos cálculos anteriores. En general, aunque un conjunto sea de tipo III, la parametrización de tipo I no coincide con la de tipo II, lo cual verificaremos más adelante.

Justificaremos lo anterior. Sea  $R_1$  la región de tipo I dada por  $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ . Si

$$\begin{aligned} c &= \inf_{a \leq x \leq b} \{\varphi_1(x)\} \\ d &= \sup_{a \leq x \leq b} \{\varphi_2(x)\} \end{aligned}$$

entonces  $R_1 \subseteq [a, b] \times [c, d]$ . Luego

$$\iint_{R_1} f(x, y) dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

donde  $\tilde{f} = f \cdot \chi_{R_1}$ . Como trabajamos con  $f$  continua tenemos que, para cada  $x \in [a, b]$ , la función  $\Psi(y) = \tilde{f}(x, y)$  es integrable sobre  $[c, d]$ , y por definición de  $\tilde{f}$  sigue que

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Luego, por teorema de Fubini,

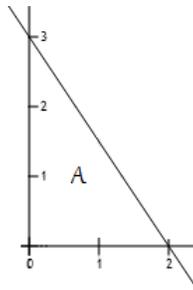
$$\iint_{R_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Para regiones de tipo II se sigue un razonamiento análogo.

Ahora veremos cómo encontrar la parametrización necesaria en un caso simple, que resulta ser un conjunto de tipo III. Así, veremos el proceso general para encontrar los límites de la integral doble y verificaremos que los límites encontrados para el tipo I no necesariamente coinciden con los encontrados para el tipo II.

**Ejemplo:** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, con  $A$  descrita como en las figuras siguientes. Queremos encontrar una forma de describir  $A$  explícitamente.

1.



En este caso, la forma más sencilla de describir la región, es por medio de funciones de  $x$ , cuando  $x \in [0, 2]$ . Es fácil ver que  $y$  está acotado inferiormente por  $f_1(x) = 0$  y superiormente por  $f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ . Así,  $A$  es de tipo I, y

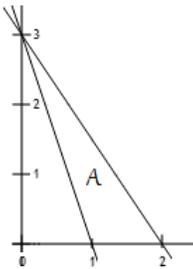
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\}$$

Además, podemos considerar describir  $A$  por medio de funciones de  $y$ , cuando  $y \in [0, 3]$ . Por despeje de la variable  $x$  en la función  $f_2$  (en  $f_1$  no se puede), tenemos que  $x$  está acotado inferiormente por  $g_1(y) = 0$  y superiormente por  $g_2(y) = -\frac{2}{3}y + 2$ . Así,  $A$  es de tipo II, y

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq -\frac{2}{3}y + 2 \right\}$$

Por lo tanto,  $A$  es de tipo III, pues se puede describir de ambas formas, pero vemos que éstas son distintas.

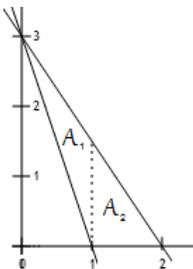
2.



Primero describiremos esta región como un conjunto de tipo II. Es fácil ver que las rectas involucradas tienen ecuación  $L_1: y = -3x + 3$  y  $L_2: y = -\frac{3}{2}x + 3$ , a partir de lo que podemos despejar  $x$  en función de  $y$ . Así, cuando  $y \in [0, 3]$ ,  $x$  está acotada inferiormente por  $g_1(y) = -\frac{1}{3}y + 1$  y superiormente por  $g_2(y) = -\frac{2}{3}y + 2$ . Luego,

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3, -\frac{1}{3}y + 1 \leq x \leq -\frac{2}{3}y + 2 \right\}$$

Además, podemos describir  $A$  como conjunto de tipo I, pero esta vez se complicará un poco, pues  $y$  en función de  $x$  es distinto en los intervalos  $[0, 1]$  y  $[1, 2]$ . Por las propiedades de la integral, podemos separar  $A$  en dos regiones,  $A_1$  y  $A_2$ . Luego sólo tendríamos que sumar las integrales sobre dichas regiones.



Cuando  $x \in [0, 1]$ ,  $A_1$  está acotado inferiormente por  $f_1(x) = -3x + 3$  y superiormente por  $f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ . Cuando  $x \in [1, 2]$ ,  $A_2$  está acotado inferiormente por  $\bar{f}_1(x) = 0$  y superiormente por  $\bar{f}_2(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ . Así,

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -3x + 3 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\} \\ A_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\} \\ A &= A_1 \cup A_2 \end{aligned}$$

Como vemos, esta vez  $A$  también es de tipo III. También es claro que la representación como región tipo I difiere mucho de la de tipo II, aunque describan la misma región.

**Ejercicio:** Describir como región tipo I o II, o como unión o intersección de ellas, la región anular

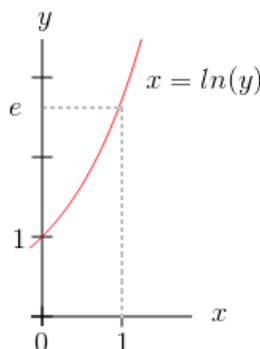
$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

También se nos puede presentar el problema inverso: determinar la región de integración (por ejemplo, en un gráfico) a partir de los límites de la integral. Esto en sí no es un problema, aunque podría ser útil (cuando sea posible) cambiar el orden de las integrales, es decir, pasar de un conjunto tipo I a una de tipo II, o viceversa.

**Ejemplo:** Los siguientes ejemplos mostrarán cómo cambiar el orden de integración, y la utilidad de ello.

- Consideremos la integral iterada  $\int_1^e \left( \int_0^{\ln(y)} f(x, y) dx \right) dy$ .

Es claro que la región se ve gráficamente como en la figura, dado que  $1 \leq y \leq e$  y  $0 \leq x \leq \ln(y)$



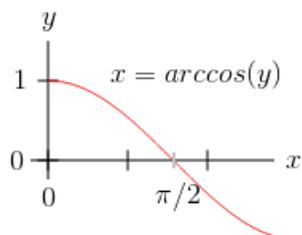
Para invertir el orden de integración, simplemente debemos ver qué funciones acotan la variable  $y$  cuando  $x \in [0, 1]$ . Resulta fácil concluir que la región está acotada inferiormente por  $f_1(x) = e^x$  y superiormente por  $f_2(x) = e$ . Así,

$$\int_1^e \left( \int_0^{\ln(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_{e^x}^e f(x, y) dy \right) dx$$

- Calcular  $\int_0^1 \int_0^{\arccos(y)} \sin(x) \sqrt{1 + \sin^2(x)} dx dy$ .

Podríamos calcular directamente esta integral, pero en general sería una tarea sumamente complicada. Para evitarlo, veremos si integrando en orden inverso se simplifica el problema. Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ 0 &\leq x \leq \arccos(y) \end{aligned}$$



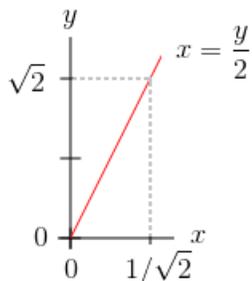
Cuando  $y \in [0, 1]$ , dadas las cotas de  $x$  sabemos que  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Además, en ese intervalo,  $y$  está acotado inferiormente por  $f_1(x) = 0$  y superiormente por  $f_2(x) = \cos(x)$ . Así

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{\arccos(y)} \sin(x) \sqrt{1 + \sin^2(x)} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} \sin(x) \sqrt{1 + \sin^2(x)} dy dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sqrt{1 + \sin^2(x)} y \Big|_0^{\cos(x)} dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sqrt{1 + \sin^2(x)} \cos(x) dx \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} u = 1 + \sin^2(x) \\ du = 2 \sin(x) \cos(x) dx \end{array} \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)
 \end{aligned}$$

- Calcular  $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y/2}^{1/\sqrt{2}} \cos(\pi x^2) dx dy$ .

Nuevamente, calcular directamente esta integral puede resultar muy complicado; tal vez imposible. Notemos ahora que la región dada por

$$\begin{aligned}
 0 &\leq y \leq \sqrt{2} \\
 \frac{y}{2} &\leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$



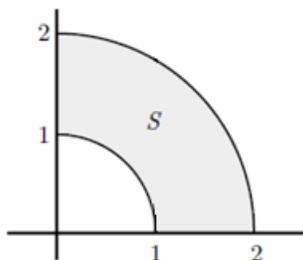
puede ser descrita también como

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 0 &\leq y \leq 2x
 \end{aligned}$$

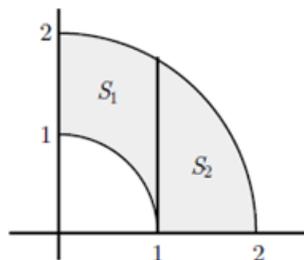
Así,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y/2}^{1/\sqrt{2}} \cos(\pi x^2) dx dy &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2x} \cos(\pi x^2) dy dx \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \cos(\pi x^2) y \Big|_0^{2x} dx \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \cos(\pi x^2) 2x dx \quad \rightarrow u = \pi x^2; du = 2\pi x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(u) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \sin(u) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Veremos cómo calcular una integral sobre una región descrita como unión de dos regiones distintas. Para ello, consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y la región  $S$  que aparece en la figura



Es fácil darse cuenta de que  $S$  es de tipo I, pues conocemos la ecuación de los círculos que la delimitan. Además, para describirla, es necesario dividirla en dos regiones como en la figura siguiente



Sigue que

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\} \\
 S_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (1, 2], 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Luego, la integral de  $f$  sobre  $S$  es la suma de la integral de  $f$  sobre  $S_1$  con la integral sobre  $S_2$ , pues  $S = S_1 \dot{\cup} S_2$ . Así,

$$\begin{aligned}
 \iint_S f(x, y) dy dx &= \iint_{S_1} f(x, y) dy dx + \iint_{S_2} f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2 dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2 dy dx
 \end{aligned}$$

Queda como ejercicio verificar que el resultado es  $15\pi/8$ . El que hayamos omitido el desarrollo de esta integral, es básicamente puesto que es engorroso y requeriría varias líneas. Por ello, surge la pregunta de si acaso hay una forma más directa de evaluar la integral. La respuesta es que, dadas ciertas condiciones, sí existe una manera de acortar el proceso de cálculo. De esto se trata la siguiente sección.

## 5.5. Cambio de variables

**Teorema 4:** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Se tiene entonces que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Este teorema nos entrega como herramienta los llamados cambios de variable, bastante útiles si dentro de una integral encontramos el producto entre una función (en este caso  $g$ ) con su derivada (aquí  $g'$ ).

Como vimos en los dos últimos ejemplos anteriores, el cálculo de una integral puede simplificarse si realizamos un cambio de variable conveniente. ¿Podremos hacer algo parecido en una integral múltiple? La respuesta es sí, y de forma muy similar a la que usamos en integrales simples. El teorema que presentaremos a continuación permite que, a partir de una función, encontremos una transformación de las variables que haga más cómodo el cálculo, lo que acarrea como consecuencia que la región sobre la que se integra también se transforme.

**Teorema 5 (Cambio de variables):** Sean  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en la región  $D$  y  $T : D' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función biyectiva y continua en  $D'$ , tal que  $T(\vec{u}) = (\vec{x}) = (x_1(\vec{u}), \dots, x_n(\vec{u}))$ . Luego,

$$\int \dots \int_D f(\vec{x})dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_{D'} f(x_1(\vec{u}), \dots, x_n(\vec{u})) \cdot |\det [J_T(\vec{u})]| du_1 \dots du_n$$

donde  $J_T$  es el jacobiano de la función  $T$ .

En particular, si  $n = 2$ , tenemos que  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $D$ ,  $T : D' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es biyectiva y continua en  $D'$  tal que  $T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$  y

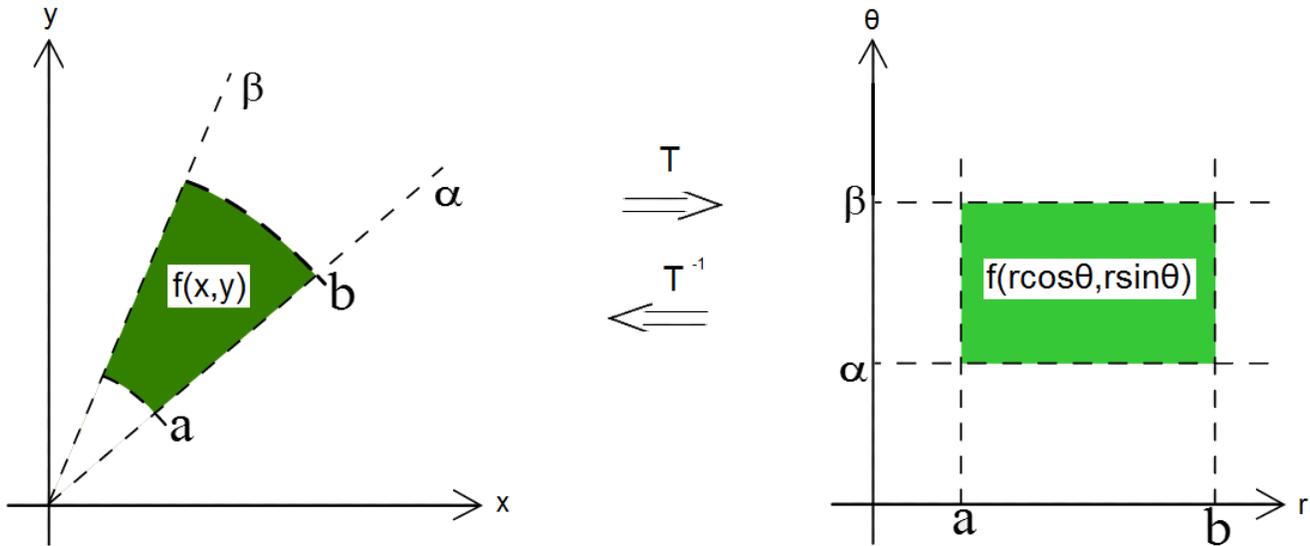
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)dx dy &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det [J_T(u, v)]| dudv \\ &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| dudv \end{aligned}$$

La demostración de este teorema usa argumentos que escapan al alcance del curso, por lo que aceptaremos este resultado general sin demostrarlo. Sin embargo, podemos hacer un *sketch of proof* para el cambio de variables a coordenadas polares. Éste es muy conveniente cuando podemos aprovechar propiedades trigonométricas a partir de la función que queremos integrar. Está dado por la biyección

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

donde  $r \in [0, \infty)$  y  $\theta \in [0, 2\pi)$ . La transformación inversa está dada, como se puede comprobar, por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$



El cambio de variables a coordenadas polares transforma secciones circulares en rectángulos.

Dejando de lado toda formalidad, podemos calcular de qué forma varían las variables radial y angular en la medida en que varían  $x$  e  $y$  por medio del operador gradiente, y calculando después la norma de este vector. Tenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies \left| \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \left| \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right| = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{x^2 + y^2} = 1$$

Luego, el diferencial de área necesariamente incluye  $r$  en su expresión, es decir,  $dx dy = r dr d\theta$ . Y vemos que, en efecto, el teorema arroja el mismo resultado:

$$|\det J_T(r, \theta)| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \right| = |r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta)| = r$$

Es necesario hacer hincapié en que el teorema de cambio de variables nos revela que el objeto que llamamos diferencial no está multiplicando en forma alguna a la función, sino que describe la medida en que afecta a la función cada paso infinitesimal que realizamos, los cuales debemos considerar si queremos calcular una integral (vista como una suma infinita de la función sobre pequeñas variaciones en su dominio). Así, en coordenadas cartesianas el objeto diferencial de área  $dA = dx dy$  se identifica en coordenadas polares con el diferencial  $dA = r dr d\theta$ , y esto es independiente de qué función queramos integrar. Esta independencia se presenta en cualquier cambio de variables que realicemos.

### Ejemplo:

- Calculemos la integral de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sobre  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .  
Primero, notemos que esta región es circular. Luego, bajo el cambio de variable  $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ , obtenemos que  $f(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$  y  $T(D) = D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \mid r \leq 2\}$ , que es una región rectangular.

Luego

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 - y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos(2\theta) \cdot |J_T(r, \theta)| dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos(2\theta) \cdot r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos(2\theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 \cos(2\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 \cos(2\theta) d\theta \\
 &= 4 \cdot \left. \frac{\sin(2\theta)}{2} \right|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Calculemos la integral de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sobre la región  $S$  descrita en el ejemplo de la sección anterior. Tenemos que en coordenadas polares  $f(r, \theta) = r^2$  y

$$S' = \left\{ (r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid r \in [1, 2], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \iiint_S f(x, y) dx dy &= \iint_{S'} f(r, \theta) \cdot r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cdot r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^3 dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_1^2 d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{15}{4} d\theta \\
 &= \left. \frac{15}{4} \theta \right|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{15}{8} \pi
 \end{aligned}$$

- Calculemos  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

$$\text{Como } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad \rightarrow (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)); dx dy = r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \quad \rightarrow u = r^2; du = 2r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} du d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -e^{-u} \Big|_0^{\infty} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $I = \sqrt{\pi}$ .

- Calculemos  $\int_0^2 \int_x^{x\sqrt{3}} x dy dx$  usando variables polares. Primero, hay que transformar la región de integración. Es fácil notar que se trata de un triángulo, por lo que la transformación viene dada por

$$\begin{aligned} y = x, 0 \leq x \leq 2 &\implies r \sin(\theta) = r \cos(\theta), 0 \leq r \cos(\theta) \leq 2 \\ &\implies \sin(\theta) = \cos(\theta), 0 \leq r \cos(\theta) \leq 2 \\ &\implies \theta = \pi/4, 0 \leq r \leq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = x\sqrt{3}, 0 \leq x \leq 2 &\implies r \sin(\theta) = \sqrt{3}r \cos(\theta), 0 \leq r \cos(\theta) \leq 2 \\ &\implies \sin(\theta) = \sqrt{3} \cos(\theta), 0 \leq r \cos(\theta) \leq 2 \\ &\implies \theta = \pi/3, 0 \leq r \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 2, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3} &\implies r \cos(\theta) = 2, 2 \leq r \sin(\theta) \leq 2\sqrt{3} \\ &\implies r = 2 \sec(\theta), 2 \leq 2 \tan(\theta) \leq 2\sqrt{3} \\ &\implies r = 2 \sec(\theta), \pi/4 \leq \theta \leq \pi/3 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_x^{x\sqrt{3}} x dy dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{2\sec(\theta)} r \cos(\theta) r dr d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{2\sec(\theta)} r^2 \cos(\theta) dr d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos(\theta) \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\sec(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos(\theta) \sec^3(\theta) d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \tan(\theta) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\
 &= \frac{8}{3} (\sqrt{3} - 1)
 \end{aligned}$$

Por supuesto, éste no es el único cambio de variables posible. Existe infinidad de ellos, que se adecúan en cierta forma al problema que se nos plantea.

**Ejemplo:** Si  $S$  es la región del primer cuadrante limitada por las curvas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 4x$ , probar que

$$\iint_S f(xy) dx dy = \ln(2) \int_1^2 f(v) dv$$

La frontera de la región  $S$  sugiere realizar el cambio  $u = y/x$ ,  $v = xy$ . Haciendo esto, obtenemos una región  $S'$  limitada por  $1 \leq v \leq 2$ ,  $1 \leq u \leq 4$ . Además, despejando  $x$  e  $y$  en función de  $u$  y  $v$ , tenemos que  $x = \sqrt{v/u}$  e  $y = \sqrt{uv}$ , por lo que

$$|\det J_T(u, v)| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2u}$$

De esta manera, la integral dada se puede escribir como

$$\iint_S f(xy) dx dy = \int_1^2 \int_1^4 f(v) \frac{1}{2u} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 f(v) \ln(u) \Big|_1^4 dv = \ln(2) \int_1^2 f(v) dv$$

## 5.6. Aplicaciones de la integral doble

En esta sección presentaremos las aplicaciones más recurrentes de la integral doble, que encontraremos útiles en geometría y en física clásica, aunque de esto se puede extender su uso a áreas más generales, como Electromagnetismo o Mecánica de Medios Continuos.

1. **Área de regiones:** Si  $S \subset \mathbb{R}^2$ , su área es

$$A(S) = \iint_S dx dy$$

2. **Masas y centro de gravedad:** Si  $S \subset \mathbb{R}^2$  representa una superficie plana con densidad puntual  $\rho(x, y) \geq 0$  para cada  $(x, y) \in S$ , entonces la masa de  $S$  viene dada por

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y) dx dy$$

y el su centro de gravedad  $(x_g, y_g)$  estaría dado por

$$x_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S x\rho(x, y) dx dy \quad y_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S y\rho(x, y) dx dy$$

3. **Volumen:** Sea  $D \subset \mathbb{R}^3$  una región  $xy$ -proyectable, definida por

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \}$$

Entonces su volumen está dado por

$$V(D) = \iint_S [g(x, y) - f(x, y)] dx dy$$

La aplicación es análoga para regiones  $xz$ -proyectables e  $yz$ -proyectables.

4. **Área de mantos:** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  la superficie  $xy$ -proyectable definida por

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y) \}$$

Entonces el área de su manto viene dado por

$$A(\Omega) = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

La aplicación es análoga para regiones  $xz$ -proyectables e  $yz$ -proyectables.

## 5.7. Cálculo de integrales triples

Como estas integrales se aplican a regiones tridimensionales (descritas por tres variables), todas las definiciones dadas al principio del capítulo se aplican al caso particular en que  $n = 3$ . Esto incluye la medida de Lebesgue de una región rectangular (que se traduce en volumen de paralelepípedos), particiones, sumas de Riemann, condición de integrabilidad, etcétera. Aquí repasaremos algunos resultados en que la tridimensionalidad sea determinante.

**Teorema 6 (Teorema de Fubini):** Sea  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  y  $h : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada e integrable sobre  $R$ . Supongamos que, para todo  $x \in [a, b]$ , está bien definida la función

$$J(x) = \iint_{R_1} h(x, y, z) dy dz$$

donde  $R_1 = [c, d] \times [e, f]$ . Entonces también existe la integral de  $J(x)$  sobre  $[a, b]$ , y se cumple

$$\iiint_R h(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left( \iint_{R_1} h(x, y, z) dy dz \right) dx$$

**Observación:** Tal como en el caso de integrales dobles, podemos definir de forma similar las funciones  $K(y)$  y  $L(z)$  en los intervalos  $[c, d]$  y  $[e, f]$ , respectivamente. Además, aplicando el teorema de Fubini para integrales dobles, podemos cambiar el orden de las integrales que definen a cada una de estas funciones, por lo que, en realidad, podemos intercambiar a nuestro antojo el orden de integración sobre regiones rectangulares.

En total, hay 6 formas distintas de calcular la misma integral triple (debido a que, para  $n$  signos integrales, hay  $n!$  permutaciones).

Como en toda función, teniendo las condiciones de integrabilidad suficientes (como continuidad) podemos evitar calcular una integral triple como el límite de las sumas de Riemann correspondientes simplemente aplicando una versión tridimensional de los teoremas de Fubini, de Lebesgue, de Cambio de Variables, etc.

Supongamos que queremos integrar una función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una región  $D$  acotada por una superficie cerrada  $\phi(x, y, z) = 0$ , es decir, acotada inferiormente por una superficie  $z_1 = f_1(x, y)$ , superiormente por una superficie

$z_2 = f_2(x, y)$  y lateralmente por un cilindro  $C$  paralelo al eje  $OZ$ . Denotemos por  $R$  la proyección vertical de  $D$  sobre el plano  $XY$ , que está encerrado en la proyección de  $C$  sobre el plano  $XY$ . Así, podemos definir  $D$  como

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

Podemos asumir el caso en que  $f_1$  y  $f_2$  son funciones continuas en  $R$ . Luego, la integral de  $F$  se calcula como

$$\iiint_D F(x, y, z) dV = \iint_R \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dA$$

Los límites de integración para  $z$  indican que, para  $(x, y)$  perteneciente a  $R$ , la coordenada  $z$  se extiende desde la superficie inferior  $z = f_1(x, y)$  hasta la superior  $z = f_2(x, y)$ , donde los valores de  $z$  se deducen de la ecuación  $\phi(x, y, z) = 0$ . Luego, el cilindro  $C$  puede tener sus “tapas” de formas irregulares, no necesariamente planas.

Una vez se calcula la integral dentro del paréntesis, obtendremos una función  $G(x, y)$ , la cual integraremos sobre la región  $R$ . Para esto, aplicaremos lo aprendido en la sección de integrales dobles, con lo que obtendremos una expresión del tipo

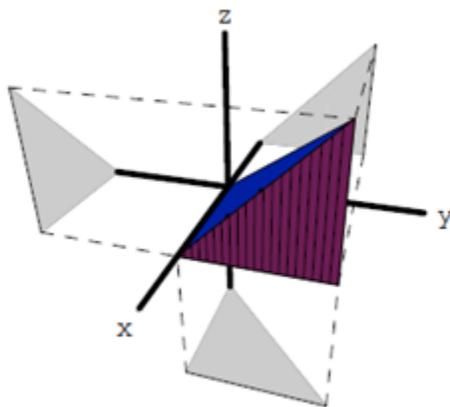
$$\begin{aligned} \iiint_D F(x, y, z) dV &= \iint_R \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dy dx \\ &= \iint_R G(x, y) dy dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz dy dx \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \iiint_D F(x, y, z) dV &= \iint_R \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_R G(x, y) dx dy \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz dx dy \end{aligned}$$

Luego, el cilindro tampoco debe tener necesariamente un manto regular. En particular, si éste se reduce a cero, tendremos que  $f_1(x, y) = f_2(x, y)$  y no existe dependencia de  $z$ , lo cual define la frontera de  $R$ . Dicho de otra forma, podemos describir una región cerrada intersectando una superficie  $f_1(x, y)$  con otra  $f_2(x, y)$ , y considerando los puntos comprendidos entre ellas.

Todos estos resultados no son solamente aplicables a  $z$ ; como lo hacíamos con integrales dobles, podemos intercambiar los roles entre las variables de la función. Si podemos parametrizar la región de integración a partir de la variable  $z$ , diremos que la región es  $xy$ -proyectable. Si, en cambio, podemos parametrizarla a partir de  $y$ , diremos que es  $xz$ -proyectable, y es  $yz$ -proyectable si se puede parametrizar a partir de  $x$ . La figura ilustra una región que es proyectable en los tres planos, por lo que es posible parametrizarla a partir de cualquiera de las tres variables cartesianas.

**Ejemplo:**

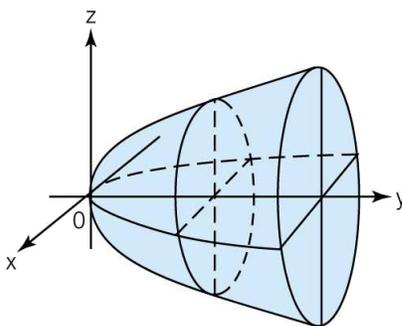
- Dada la integral  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$ , encontrar la región de integración  $R$ .

En este caso, queda claro que  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$  (basta ver la correspondencia entre signo integral y diferencial). Luego,  $y$  está acotado por las funciones  $\varphi_1(x) = 0$  y  $\varphi_2(x) = x$ ; en el plano  $xy$  se genera un triángulo. Además,  $z$  está acotado por las funciones  $\psi_1(y) = 0$  y  $\psi_2(y) = y$ ; en el plano  $yz$  también se genera un triángulo. Finalmente, como  $y \leq x$ , tenemos que  $0 \leq z \leq x$ , por lo que en el plano  $xz$  tendremos otro triángulo. Luego, al extender estos triángulos en las coordenadas  $z, x$  e  $y$ , respectivamente, tendremos que la intersección nos da la región  $R$  que buscamos, y que es exactamente la región de la figura anterior.

Queda como ejercicio expresar la integral anterior en todas sus 6 formas posibles.

- Encontrar los límites de integración para  $\iiint_R f(x, y, z) dV$ , donde  $R$  es la región que encierran el paraboloide de ecuación  $y = x^2 + z^2$  y el plano  $y = 4$ .

La región se ve gráficamente así



Luego, no es difícil darse cuenta de que, en el plano  $xy$ , se forma una región acotada inferiormente por una parábola y superiormente por la recta  $y = 4$ . Esta región se describe tomando  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $x^2 \leq y \leq 4$ . Finalmente, de la ecuación de la parábola, podemos despejar  $z$  en función de  $x$  e  $y$ , de forma que  $-\sqrt{x^2 - y} \leq z \leq \sqrt{x^2 - y}$ . Así,  $R$  queda completamente descrita y la integral se escribe

$$\int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{x^2 - y}}^{\sqrt{x^2 - y}} f(x, y, z) dV$$

- Hallar  $\iiint z dV$  en el octante positivo de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

La región  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}$  es de los tres tipos mencionados. Describámosla a partir de  $z$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Así,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in R\}$

Además, la proyección sobre el plano  $XY$ ,  $R$ , queda parametrizada por  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0\}$ , que es  $x$ -proyectable.

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \sqrt{1 - x^2}$$

Así,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \iiint_D z dV &= \iint_R \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \right) dy \right) dx \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

## 5.8. Cambio de Variables: coordenadas cilíndricas y esféricas

Aplicaremos el mismo teorema expuesto para integrales dobles: sea  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $D$ ,  $T : D' \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  biyectiva y continua en  $D'$  tal que  $T(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ . Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |\det [J_T(u, v, w)]| du dv dw \\ &= \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| du dv dw \end{aligned}$$

Veremos los dos cambios de variables más usados en Física.

- **Coordenadas cilíndricas:** En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto  $P$  del espacio se representa por un tríptico ordenado  $(r, \theta, z)$ , donde el par  $(r, \theta)$  es la representación polar de la proyección de  $P$  en el plano  $XY$ , y  $z$  es la distancia orientada (es decir, con signo) de  $(r, \theta)$  a  $P$ . De esta manera, podemos realizar el cambio de variable a partir de

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = z$$

Es decir, consideramos la transformación

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Para que ésta sea inyectiva, es necesario que  $(r, \theta, z) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Al punto  $(0, 0, 0)$  se le llama polo. Es un punto singular, pues no está en el rango de la transformación, y si lo estuviera, ésta ya no sería inyectiva.

El cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas conlleva cambiar el diferencial  $dx dy dz$ . Como

$$|\det J_T(r, \theta, z)| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = r$$

se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz$$

donde  $D' = T(D)$ . En particular, si  $D$  es un prisma,  $T$  lo transforma en un prisma cilíndrico. También podemos generalizar estas coordenadas de forma que

$$x = ar \cos(\theta) \quad y = br \sin(\theta) \quad z = c\bar{z}$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Es conveniente su uso cuando la región se asemeje a una elipse, pues convierte  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  en  $r^2$ . En este caso, el módulo del determinante del jacobiano resulta ser  $abcr$ , y

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(ar \cos(\theta), br \sin(\theta), c\bar{z}) abcr dr d\theta d\bar{z}$$

- **Coordenadas esféricas:** En un sistema de coordenadas esféricas, un punto  $P$  del espacio se representa por un trío ordenado  $(r, \theta, \phi)$ , donde  $r$  es la distancia orientada desde  $P$  hasta el origen,  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $OX$  positivo y la proyección del vector  $\vec{OP}$  en el plano  $XY$ , es decir, es el mismo ángulo que el usado en coordenadas cilíndricas (llamado eje polar) y  $\phi$  es el ángulo entre el eje  $OZ$  positivo y el segmento  $\vec{OP}$  (llamado eje azimutal). De esta manera, el cambio de variables viene dado por

$$x = r \cos(\theta) \sin(\phi) \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad z = r \cos(\phi)$$

Es decir, consideramos la transformación

$$(x, y, z) = T(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

Para que ésta sea inyectiva, se debe tener que  $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ . Dado este cambio de variable, tenemos

$$|J_T(r, \theta, \phi)| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{bmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi)$$

Tenemos entonces

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi)) r^2 \sin(\phi) dr d\theta d\phi$$

## 5.9. Aplicaciones de la integral triple

1. **Cálculo de volúmenes:** Si  $D \subset \mathbb{R}^3$ , su volumen es

$$V(D) = \iiint_D dx dy dz$$

2. **Cálculo de masas y centro de gravedad:** Si  $D \subset \mathbb{R}^3$  representa un sólido tridimensional con densidad puntual  $\rho(x, y, z) \geq 0$ , la masa de  $D$  viene dada por

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

y el centro de gravedad de  $D$ ,  $(x_g, y_g, z_g)$ , se calcula como

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_g &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_g &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

## 5.10. Apéndice

En esta última sección demostraremos el teorema de Lebesgue, la cual dejamos para el final por la necesidad de dejar un poco de lado el contexto en que lo enunciamos. Trataremos el caso general de  $\mathbb{R}^n$ , aunque para claridad mental, puede ser conveniente considerar  $n = 2$  y luego extender lo visto.

**Definición 23:** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Dado un subconjunto  $B \subseteq A$ , se define la oscilación de  $f$  en  $B$  como

$$o(f, B) = \sup_{x \in B} \{f(x)\} - \inf_{x \in B} \{f(x)\}$$

Dado  $\delta > 0$ , se define para cada  $x \in A$

$$o(f, x, \delta) = o(f, B(x, \delta) \cap A)$$

Para cada  $x \in A$ , se define la oscilación de  $f$  en  $x$  como

$$o(f, x) = \inf_{\delta > 0} \{o(f, x, \delta)\}$$

**Lema 1:** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y  $x \in A$ .  $f$  es continua en  $x$  si y sólo si  $o(f, x) = 0$ .

**Dem.:**

$\Rightarrow$  Supongamos primero que  $f$  es continua en  $x$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in B(x, \delta) \cap A$  se tiene  $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces

$$f(y) - f(z) \leq |f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon$$

para todo  $y, z \in B(x, \delta) \cap A$ . Luego, tomando supremo en  $y$  e ínfimo en  $z$ ,

$$o(f, x) \leq o(f, x, \delta) = \sup_{y \in B(x, \delta) \cap A} \{f(y)\} - \inf_{z \in B(x, \delta) \cap A} \{f(z)\} \leq \varepsilon$$

Esto es para todo  $\varepsilon > 0$ , por lo que necesariamente  $o(f, x) = 0$ .

$\Leftarrow$  Recíprocamente, sea  $y \in B(x, \delta) \cap A$ . Tenemos

$$f(y) - f(x) \leq \sup_{u \in B(x, \delta) \cap A} \{f(u)\} - \inf_{v \in B(x, \delta) \cap A} \{f(v)\} = o(f, x, \delta) \leq \varepsilon$$

$$f(x) - f(y) \leq \sup_{u \in B(x, \delta) \cap A} \{f(u)\} - \inf_{v \in B(x, \delta) \cap A} \{f(v)\} = o(f, x, \delta) \leq \varepsilon$$

Luego  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ , por lo que  $f$  es continua en  $x$ . ■

**Definición 24:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diremos que un conjunto  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  es

- cerrado relativo a  $A$ , si  $(\exists K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ cerrado}) B = A \cap K$
- abierto relativo a  $A$ , si  $(\exists U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ cerrado}) B = A \cap U$

**Observación:** Si  $A$  es cerrado (resp. abierto) en  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  es cerrado (resp. abierto) relativo a  $A$  si y sólo si es cerrado (resp. abierto) en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 2:** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, con  $A$  un conjunto cerrado. Para todo  $p > 0$ , el conjunto  $N_p = \{x \in A \mid o(f, x) \geq p\}$  es cerrado relativo a  $A$  y cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

**Dem.:** Sea  $p > 0$ . Demostraremos que  $A \setminus N_p$  es abierto relativo a  $A$ , es decir, que dado  $x \in A \setminus N_p$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $B(x, \delta) \cap A \subseteq A \setminus N_p$ .

Para  $x \in A \setminus N_p$ , se tiene que  $o(f, x) < p$ , luego por definición de oscilación de  $f$  en un punto existe algún  $\delta > 0$  tal que  $o(f, x, \delta) < p$ . Sea ahora  $y \in B(x, \delta) \cap A$ , y escojamos  $\delta' > 0$  tal que  $B(z, \delta') \subseteq B(x, \delta)$  (este  $\delta'$  existe pues  $B(x, \delta)$  es un conjunto abierto). Tenemos que

$$o(f, z) \leq o(f, z, \delta') \leq o(f, x, \delta) < p$$

Luego  $z \in A \setminus N_p$ , con lo que  $N_p$  es cerrado relativo a  $A$ , y como  $A$  también es cerrado,  $N_p$  es también cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 25:** Un conjunto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacto si, para cualquier familia de abiertos que recubre  $K$ , existe un subrecubrimiento finito. ■

**Observación:** Esta definición de compacidad es equivalente a que  $K$  sea cerrado y acotado, aunque la demostración de ello no es trivial. Corresponde al llamado teorema de Heine-Borel.

**Lema 3:** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un rectángulo cerrado y acotado, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función acotada. Supongamos que existe  $q > 0$  tal que  $o(f, x) < q$  para todo  $x \in A$ . Entonces existe una partición  $P \in \mathcal{P}_A$  tal que

$$S(f, P) - s(f, P) \leq q \cdot \lambda(A)$$

**Dem.:** Como  $o(f, x) < q$ , para cada  $x \in A$  existe  $\delta_x > 0$  tal que  $o(f, x, \delta_x) < q$ . Consideramos entonces un rectángulo abierto  $Q_x$  tal que

$$x \in Q_x \subseteq \overline{Q_x} \subseteq B(x, \delta_x)$$

Tenemos que  $A \subseteq \bigcup_{x \in A} Q_x$ , y la familia  $\{Q_x\}_{x \in A}$  es un recubrimiento abierto de  $A$ , el cual es compacto (es cerrado y

acotado). Luego, existen  $x_1, \dots, x_k \in A$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k Q_{x_i} \bigcup_{i=1}^k \overline{Q_{x_i}}$ .

Sea  $P$  la partición de  $A$  determinada por los vértices de los rectángulos  $Q_{x_i}$  que están en  $A$  (omitimos los vértices que están fuera). Cada rectángulo  $R$  así definido está contenido en alguno de los  $\overline{Q_{x_i}} \cap A$ , por lo que

$$o(f, R) \leq o(f, \overline{Q_{x_i}} \cap A) \leq o(f, B(x_i, \delta_{x_i}) \cap A) = o(f, x_i, \delta_{x_i}) < q$$

Entonces

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_R (M_R(f) - m_R(f)) \lambda(R) \\ &= \sum_R o(f, R) \lambda(R) \\ &\leq q \sum_R \lambda(R) \\ &= q \lambda(A) \end{aligned}$$

Para lo que sigue, es recomendable haber leído la sección **Integrales sobre conjuntos más generales**. Recordemos que un conjunto  $K$  se dice de medida nula, o con contenido cero, si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_1, \dots, U_m) \ a \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda(U_i) < \varepsilon$$

Además,  $K$  es Jordan-medible si su frontera,  $\partial K$ , tiene contenido cero. ■

El teorema de Lebesgue reza: Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y continua, con  $A$  un conjunto acotado. Entonces la función  $\tilde{f} : R \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ , es Riemann-integrable si y sólo si  $A$  es Jordan-medible.

Como  $A$  es acotado, podemos considerar el conjunto que lo contiene,  $R$ , como un rectángulo. Dijimos en su momento que, en general,  $\tilde{f}$  no es continua en todo  $R$ . Sin embargo, sí es continua fuera de  $A$  (pues se anula) y también lo es en el interior de  $A$ , por hipótesis. Por lo tanto, el único lugar en que puede haber discontinuidad, es en la frontera de  $A$ ,  $\partial A$ . Luego, el conjunto de puntos en que  $\tilde{f}$  es discontinua es subconjunto de  $\partial A$ . Además, sabemos que toda función continua en una región cerrada y acotada (luego compacta) como es  $R$ , es integrable en dicha región. Entonces debemos ver que la discontinuidad de  $\tilde{f}$  en  $\partial A$  no afecte su integrabilidad. Esto se logra si la integral sobre los puntos de discontinuidad es nula. Entonces, enunciaremos el teorema de Lebesgue en una forma distinta pero equivalente:

**Teorema de Lebesgue:** Sean  $R \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo cerrado y acotado,  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y el conjunto  $N = \{x \in R \mid \tilde{f} \text{ no es continua en } x\}$ . Entonces  $\tilde{f}$  es Riemann-integrable en  $R$  si y sólo si  $N$  tiene contenido cero.

**Observación:** Aquí, la función  $\tilde{f}$  es cualquier función que no necesariamente sea continua, y la idea es vincular eso con lo dicho anteriormente, es decir, que  $R$  contenga una región  $A$  en la que  $\tilde{f}$  sea continua (pero en cuya frontera no necesariamente lo es), y otra región en la que sea nula, aunque esto último no es requerido.

**Dem.:**

$\Leftarrow$  Supongamos que  $N$  tiene contenido cero, y veamos que con esto  $\tilde{f}$  es integrable en  $R$ . Para ello, veremos que se satisface la condición de Riemann.

Sea  $\varepsilon > 0$ , y definamos  $N_\varepsilon = \{x \in R \mid o(\tilde{f}, x) \geq \varepsilon\}$ . Por el lema 2,  $N_\varepsilon$  es cerrado en  $R$ , que es compacto (pues es cerrado y acotado). Luego  $N_\varepsilon$  es compacto. Además, por el lema 1,  $N_\varepsilon \subseteq \{x \in A \mid o(\tilde{f}, x) > 0\} = N$ . Como por hipótesis  $N$  tiene contenido cero, también  $N_\varepsilon$  tiene contenido cero. Entonces, dado ese mismo  $\varepsilon$ , existen

rectángulos cerrados  $U_1, \dots, U_m$  tales que  $R \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$ ,  $\sum_{i=1}^m \lambda(U_i) < \varepsilon$ .

Consideramos la partición  $P$  en  $R$  dada por los vértices de los rectángulos  $U_i$ , y la familia de rectángulos que ésta genera,  $\mathcal{R}_P$ . Para cada subrectángulo definido por esta partición, éste puede estar contenido en algún  $U_i$ , o bien no estar en ninguno, es decir para cada subrectángulo  $K$  de la partición, se tiene

$(\exists U_k \in \{U_i\}_{i=1}^m) K \subset U_i \vee (\forall U_k \in \{U_i\}_{i=1}^m) K \cap U_k = \emptyset$ . Sea  $\mathcal{R}_1$  la familia de rectángulos de la partición que están contenidos en algún  $U_k$ , y  $\mathcal{R}_2$  la familia de los demás rectángulos de la partición. Si  $K \in \mathcal{R}_2$ ,  $K \cap N_\varepsilon = \emptyset$ .

Luego, para todo  $x \in K$  la oscilación  $o(f, x) < \varepsilon$ . Por el lema 3, existe una partición de  $K$ ,  $P_K$ , tal que

$$S(\tilde{f}|_K, P_K) - s(f|_K, P_K) < \varepsilon \cdot \lambda(K)$$

Ahora sea  $P'$  la partición de  $R$  dada por todas las particiones  $P_K$ , con  $K \in \mathcal{R}_2$ , y por la partición original  $P$ . Definimos  $\mathcal{R}_{P'}$  la familia de todos los rectángulos que define esta partición. Por definición,  $P'$  es más fina que ambas particiones anteriores, y para cada  $K \in \mathcal{R}_2$  determina una partición  $P'_K = \{K' \in \mathcal{R}_{P'} \mid K \subseteq K'\}$  más fina que  $P_K$ . Luego, para cada  $K \in \mathcal{R}_2$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{K' \in \mathcal{R}_{P'} \\ K' \subseteq K}} (M_{K'}(\tilde{f}) - m_{K'}(\tilde{f})) \cdot \lambda(K') &= S(\tilde{f}|_{K'}, P'_K) - s(\tilde{f}|_{K'}, P'_K) \\ &\leq S(\tilde{f}|_K, P_K) - s(\tilde{f}|_K, P_K) \\ &< \varepsilon \lambda(K) \end{aligned}$$

Ahora, para todo  $Q \in \mathcal{R}_1$ , tomando una cota  $M > 0$  para  $|\tilde{f}|$  (pues es acotada),

$$\sum_{\substack{Q' \in \mathcal{R}_{P'} \\ Q' \subseteq Q}} (M_{Q'}(\tilde{f}) - m_{Q'}(\tilde{f})) \cdot \lambda(Q') \leq 2M \sum_{\substack{Q' \in \mathcal{R}_{P'} \\ Q' \subseteq Q}} \lambda(Q')$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} S(\tilde{f}, P') - s(\tilde{f}, P') &= \sum_{Q \in \mathcal{R}_1} \left( \sum_{\substack{Q' \in \mathcal{R}_{P'} \\ Q' \subseteq Q}} (M_{Q'}(\tilde{f}) - m_{Q'}(\tilde{f})) \cdot \lambda(Q') \right) + \sum_{K \in \mathcal{R}_2} \left( \sum_{\substack{K' \in \mathcal{R}_{P'} \\ K' \subseteq K}} (M_{K'}(\tilde{f}) - m_{K'}(\tilde{f})) \cdot \lambda(K') \right) \\ &\leq 2M \sum_{Q \in \mathcal{R}_1} \lambda(Q) + \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{R}_2} \lambda(K) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^m \lambda(U_i) + \varepsilon \cdot \lambda(R) \\ &< (2M + \lambda(A))\varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $\varepsilon$  es arbitrario,  $P'$  es tal que se satisface la condición de Riemann, y luego  $\tilde{f}$  es integrable en  $R$ .

$\implies$  Supongamos que  $\tilde{f}$  es integrable en  $R$ . Definimos los conjuntos  $N_{1/n} = \{x \in A \mid o(\tilde{f}, x) \geq \frac{1}{n}\}$ , de modo que

$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{1/n}$ . Veremos que cada  $N_{1/n}$  tiene contenido cero, con lo que se tendrá que  $N$  es unión numerable de conjuntos de contenido cero y, por tanto, tendrá contenido cero.

Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon > 0$  fijos. Aplicando la condición de Riemann, existe una partición  $P$  de  $R$  tal que  $S(\tilde{f}, P) - s(\tilde{f}, P) < \varepsilon/n$ . Llamamos  $\mathcal{R}_P$  la familia de rectángulos que define  $P$  y  $K_1, \dots, K_m$  los rectángulos definidos por  $P$  que tienen algún punto de  $N_{1/n}$  en su interior (de modo tal que, para todo  $i$ ,  $K_i \cap N_{1/n} \neq \emptyset$ ), y definimos los conjuntos

$$N_{1/n}^{(1)} = N_{1/n} \cap \left( \bigcup_{i=1}^m K_i \right)$$

$$N_{1/n}^{(2)} = N_{1/n} \cap \left( \bigcup_{K \in \mathcal{R}_P} \partial K \right)$$

Con esto separamos los puntos de  $N_{1/n}$  que están en el interior de algún rectángulo  $K_i$  de los que estarán en la frontera de alguno de los rectángulos definidos por  $P$ .

Para cada rectángulo  $K$ , la frontera de  $K$  es una unión finita de rectángulos de medida cero en  $\mathbb{R}^n$  (es análogo al primer ejemplo dado en la sección de integrales sobre conjuntos más generales). Luego, el conjunto  $N_{1/n}^{(2)}$  está contenido en una unión finita de rectángulos con suma de medidas igual a cero.

Por otro lado, tenemos el conjunto  $N_{1/n}^{(1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_i$ . Cada  $K_i$  contiene en su interior por lo menos un punto  $x_i$  de  $N_{1/n}$ , donde  $o(\tilde{f}, x_i) \geq \frac{1}{n}$ . Tomamos  $\delta > 0$  de modo que  $B(x_i, \delta) \subset K_i$ , y tenemos

$$\begin{aligned} o(\tilde{f}, K_i) &\geq o(\tilde{f}, B(x_i, \delta)) \\ &= o(\tilde{f}, x_i, \delta) \\ &\geq o(\tilde{f}, x_i) \\ &\geq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \lambda(K_i) &\leq \sum_{i=1}^m o(\tilde{f}, K_i) \cdot \lambda(K_i) \\ &\leq S(\tilde{f}, P) - s(\tilde{f}, P) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

Con lo que  $\sum_{i=1}^m \lambda(K_i) \leq \varepsilon$ . Luego,  $N_{1/n}^{(1)}$  tiene contenido cero. Así,  $N_{1/n} \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^m K_i \right) \cup \left( \bigcup_{K \in \mathcal{R}_P} \partial K \right)$ , unión finita de rectángulos cuya suma de medidas es menor que  $\varepsilon$ , y por tanto tiene medida cero. ■