MA2001-1. Cálculo en Varias Variables 2014.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Simón Piga - Valentín Retamal
Fecha: 15 de Enero de 2015

Problemas Auxiliar 10

P1 *a*) Pruebe que la ecuación $y^2x - x^2y + x\sin(z) = 2$ define una función implícita $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(1, -1, 0)$ y hallar el plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(1, -1, 0)$.

b) Pruebe que el sistema

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= 1 \\ e^{xy} + x^2 - z^2 &= 1\end{aligned}$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 0, 2)$. Luego encuentre $y(2)$, $z(2)$, $\frac{\partial y}{\partial x}(2)$ y $\frac{\partial z}{\partial x}(2)$.

P2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Decimos que f satisface la ecuación de Laplace si

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

a) Considere el cambio de variables dado por $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Muestre que si f satisface la ecuación de Laplace, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

b) Suponga que f sólo depende de θ. Determine f explícitamente si $f(0) = \alpha$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta}(0) = \beta$.

c) Usando la parte anterior determine $f(x, y, z)$.

P3 *a*) Pruebe que la ecuación $z^3\ln(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ define dos funciones $z = \varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2$ en un entorno del punto $(1, 1)$. Encuentre el desarrollo de Taylor de ambas funciones en torno a $(1, 1)$.

b) Sea la ecuación $\ln(x + y) + y = 1$.

i) Muestre que, a partir de la ecuación anterior se puede definir una función $y = \varphi(x)$ tal que $y(0) = 1$ y diferenciable en una vecindad del origen.

ii) Calcule el polinomio de Taylor de y y y^{-1} en torno a 0 y 1, respectivamente.