MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Simón Pigaz- Valentín Retamal.
Fecha: 29 de Diciembre 2014 .

Pauta Control 2

P1 1) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Construya un esquema en que explique qué propociciones implican otras, y cuales son equivalentes. En los casos en que las implicancias no se cumplen, muestre un contraejemplo.

a) f es diferenciable en x_0.
b) Existen las derivadas parciales de f en x_0
c) f es continua en x_0.
d) $D_{\vec{v}}f(x_0)$ existe para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
e) Existen las derivadas parciales de f en x_0 y son continuas en x_0.

2) Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) + y^2 sen(\frac{1}{y}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } y = 0, x \neq 0 \\ y^2 sen(\frac{1}{y}) & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule las derivadas parciales de f en todo punto (incluyendo el $(0,0)$.
b) Demuestre que f es diferenciable en $(0,0)$
c) ¿Son las derivadas parciales de f continuas en $(0,0)$?

Sol:

1) El esquema de implicancias es:

$$[\mathcal{C}^1] \implies [Dif] \implies [deriv.direc] \implies [derivparcial]$$

Además de

$$[Dif] \implies [Cont]$$

En términos del enunciado:

$$(e) \implies (a) \implies (d) \implies (b)$$
$$(a) \implies (c)$$

Considerando obviamente las implicancias que se deducen por transitividad.

Para los contraejemplos consideraremos:

- $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$ (Extendida por 0 en $(0,0)$)
  Muestra que $(b) \not\Longrightarrow (d)$ pues tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no tiene derivada direccional en $(0,0)$ en la dirección $v = (1,1)$.

- $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (Extendida por 0 en $(0,0)$).
  Muestra que $(b) \not\Longrightarrow (c) \vee (a) \vee (e)$ Pues tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es continua en $(0,0)$ (por lo tanto no es diferenciable en $(0,0)$, ni sus derivadas parciales son continuas en $(0,0)$).

  Además muestra que $(d) \not\Longrightarrow (c)$ pues existen todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$, y sin embargo no es continua.

- $f(x) = \sqrt{|x|}$ (en una variable, por lo que la derivada parcial calza con la derivada usual). Muestra que $(c) \not\Rightarrow (a) \vee (b) \vee (d) \vee (e)$ Pues es continua en 0, sin embargo, no tiene derivadas parciales ni direccionales en 0 (por lo tanto no es diferenciable, ni tiene derivadas parciales continuas).
- Utilizamos también la función de la parte (2) de esta misma pregunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) + y^2 sen(\frac{1}{y}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } y = 0, x \neq 0 \\ y^2 sen(\frac{1}{y}) & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Muestra que $(a) \not\Rightarrow (e)$ pues es Diferenciable, pero con derivadas parciales no continuas.

2) a) Calculemos las derivadas para $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial x^2 sen(\frac{1}{x})}{\partial x}(x,y) \\ &= 2x \cdot sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{y})$$

Por otro lado, en $(0,0)$ vamos por definición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen(\frac{1}{h})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \cdot sen(\frac{1}{h}) = 0 \end{aligned}$$

(nula por acotada)

Análogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Veamos que es Diferenciable en $(0,0)$:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k - f(0,0)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 sen(\frac{1}{h}) + k^2 sen(\frac{1}{k})}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Consideremos Coordenadas Polares

$$\begin{aligned} &= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 cos^2(\theta) \cdot sen(\frac{1}{\rho cos(\theta)}) + \rho^2 sen^2(\theta) \cdot sen(\frac{1}{\rho sen(\theta)})}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \to 0} \rho \cdot cos^2(\theta) \cdot sen(\frac{1}{\rho cos(\theta)}) + \rho \cdot sen^2(\theta) \cdot sen(\frac{1}{\rho sen(\theta)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Nuevamente Nula por Acotada)
Lo anterior sin importar la tendencia del ángulo, por lo que el límite tiende a 0, y con ello se concluye que la función es diferenciable.

c) Las Derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$

Vemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \cdot sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$$

Diverge!
Puesto que si bien la primera parte tiende a 0, es fácil ver que la segunda oscila entre -1 y 1.

Y ocurre análogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Por lo que, si bien sus derivadas parciales están definidas en $(0,0)$, no son continuas en ese punto.

P2 a) (4 puntos) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$. Se quiere determinar todas las funciones $f : D \to \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales sobre D son contiunas y satisacen la siguiente ecuación diferencial:

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Para resolverlo usted tiene que usar un cambio de variables que le permita resolverlo. Para esto considere la siguiente transformación de coordenadas:

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u = x \\ v = xy^2 \end{pmatrix}$$

Transforme la EDP entregada en una EDO en las nuevas coordenadas y resuelva usando técnicas ya conocidas.
Hint: le puede ser útil considerar $g(u,v) = f \circ T(u,v) = f(T(u,v)) = f(x,y)$. y usarla para calcular las derivadas parciales de f.

b) (2 puntos) Sea $F(x,y) := f(f(x,y), f(x,y))$ donde f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. se suguiere como derivada parcial de F respecto de x lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

¿Es esto correcto? Justifique. En caso que no sea correcto, dé la expresión que usted cree es correcta.

Compruebe la igualdad anterior para $f(x,y) = x^2 + 3xy$. ¿funciona la fórmula?

Sol:

a) (4 puntos)
Considérese $x = u$, $y = \sqrt{\frac{v}{u}}$. Entonces:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Aplicando regla de la cadena a $f(x(u,v), y(u,v))$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Despejando las derivadas parciales respecto de x e y, queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial v} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{uv}\frac{\partial f}{\partial v}$$

Reemplazando en la EDP:

$$2u\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \sqrt{\frac{v}{u}}2\sqrt{uv}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \implies 2u\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \implies f(u,v) = h(v) + c$$

$$\therefore f(x,y) = h(xy^2) + c$$

donde h es una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

b) (2 Puntos)
Veamos primero el caso $F(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$, con f, u y v diferenciables, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Reemplazando el caso particular $u = v = f$, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x,y),f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f(x,y),f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

pero $\dfrac{\partial f}{\partial x}(f(x,y),f(x,y))$ no es necesariamente igual a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, pues ambas funciones están evaluadas en diferentes puntos. Luego la fórmula entregada es incorrecta.
Por otro lado:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x$$

Según la fórmula dada, se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2x+3y)^2 + (2x+3y)3x = (2x+3y)(5x+3y)$$

Pero, por otra parte:

$$F(x,y) = (x^2+3xy)^2 + 3(x^2+3xy)^2 = 4(x^2+3xy)^2$$
$$\implies \frac{\partial F}{\partial x} = 8(x^2+3xy)(2x+3y)$$

Donde podemos ver que es distinto a lo que daba la formula entregada en el encuncíado.

P3 i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Considere $g(u(x,y),v(x,y)) = f(x,y)$, donde $x = ve^u$ y $y = ve^{-u}$. Escriba ∇f en términos de u y v.

ii) Definimos las coordenadas elípticas cilíndricas por

$$\begin{aligned} x &= \alpha\cosh(u)\cos(v) \\ y &= \alpha\sinh(u)\sin(v) \\ z &= z \end{aligned}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$ y α es una constante no negativa. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Escriba ∇f en términos de u, v y z.

Sol:

a)

$$\begin{array}{c} x = ve^{u} \\ y = ve^{-u} \end{array} \iff \begin{array}{c} v = \sqrt{xy} \\ u = \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{y}) \end{array} \quad \therefore \quad \begin{array}{cc} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{\sqrt{xy}} = \dfrac{1}{2}e^{-u} & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{xy}} = \dfrac{1}{2}e^{u} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-u}}{v} & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{u}}{v} \end{array}$$

$$\therefore \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-u}}{v}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{1}{2}e^{-u}\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{e^{-u}}{2}\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{u}}{v}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{1}{2}e^{u}\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{e^{u}}{2}\left(-\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \end{array}$$

b) (★) $x = \alpha\cosh(u)\cos(v)$
(♣) $y = \alpha\sinh(u)\sin(v)$
(♠) $z = z$
Derivamos con respecto a x:

$$\begin{array}{lll} (\bigstar) & \dfrac{\partial}{\partial x}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha\cosh(u)\cos(v)) \implies & 1 = \alpha\sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha\cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ (\clubsuit) & \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha\sinh(u)\sin(v)) \implies & 0 = \alpha\cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha\sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{array}{rl} \sinh(u)\cos(v)(\bigstar) + \cosh(u)\sin(v)(\clubsuit) \implies & \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2\sinh(u)\cos(v)}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))} \\ -\cosh(u)\sin(v)(\bigstar) + \sinh(u)\cos(v)(\clubsuit) \implies & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2\cosh(u)\sin(v)}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))} \end{array}$$

Derivamos con respecto a y:

$$\begin{array}{lll} (\bigstar) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha\cosh(u)\cos(v)) \implies & 0 = \alpha\sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \alpha\cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ (\clubsuit) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha\sinh(u)\sin(v)) \implies & 1 = \alpha\cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \alpha\sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{array}{rl} \sinh(u)\cos(v)(\bigstar) + \cosh(u)\sin(v)(\clubsuit) \implies & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2\cosh(u)\sin(v)}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))} \\ -\cosh(u)\sin(v)(\bigstar) + \sinh(u)\cos(v)(\clubsuit) \implies & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2\sinh(u)\cos(v)}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))} \end{array}$$

Es claro que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$.

$$\therefore \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))}\left(\sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial g}{\partial u} - \cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{\alpha(c\cosh(2u) - \cos(2v))}\left(\cosh(u)\sin(v)\dfrac{\partial g}{\partial u} + \sinh(u)\cos(v)\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{array}$$