

MA2001-1 Semestre 2015-03

Profesor: Marcelo Leseigneur P

Auxiliares y Ayudantes: Simón Piga, Valentin Retamal, Obed Ulloa

Control 2

P1.

1) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Construya un esquema en que explique qué proposiciones implican otras, y cuales son equivalentes. En los casos en que las implicancias no se cumplen, muestre un contraejemplo.

- a) f es diferenciable en x_0 .
- b) Existen las derivadas parciales de f en x_0
- c) f es continua en x_0 .
- d) $D_{\vec{v}}f(x_0)$ existe para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
- e) Existen las derivadas parciales de f en x_0 y son continuas en x_0 .

2) Considere la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Calcule las derivadas parciales de f en todo punto (incluyendo el $(0, 0)$).
- b) Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$
- c) ¿Son las derivadas parciales de f continuas en $(0, 0)$?

P2.

a) [4 puntos]

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$. Se quiere determinar todas las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales sobre D son continuas y satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Para resolverlo usted tiene que usar un cambio de variables que le permita resolverlo. Para esto considere la siguiente transformación de coordenadas:

$$T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u = x \\ v = xy^2 \end{pmatrix}$$

Transforme la EDP entregada en una EDO en las nuevas coordenadas y resuelva usando técnicas ya conocidas.

Hint: le puede ser útil considerar $g(u, v) = f \circ T(u, v) = f(T(u, v)) = f(x, y)$. y usarla para calcular las derivadas parciales de f .

b) [2 puntos]

Sea $F(x, y) := f(f(x, y), f(x, y))$ donde f es una función diferenciable en \mathbb{R}^2 . se sugiere como derivada parcial de F respecto de x lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

¿Es esto correcto? Justifique. En caso que no sea correcto, dé la expresión que usted cree es correcta.

Compruebe la igualdad anterior para $f(x, y) = x^2 + 3xy$. ¿funciona la fórmula?

P3.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Considere $g(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, donde $x = ve^u$ y $y = ve^{-u}$. Escriba ∇f en términos de u y v .

ii) Definimos las coordenadas elípticas cilíndricas por

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cosh(u) \cos(v) \\ y &= \alpha \sinh(u) \sin(v) \\ z &= z \end{aligned}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$ y α es una constante no negativa. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Escriba ∇f en términos de u , v y z .