MA2001-1. Cálculo en Varias Variables 2014.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Simón Piga - Valentín Retamal
Fecha: 8 de Enero de 2015

Problemas Auxiliar 8

P1 *a)* Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^t Ax + b^t x + c$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Calcule J_f sin derivar.

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|Ax - b\|^2$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Calcule ∇f. [1]

P2 *a)* Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado un punto $\bar{x} \in A$, muestre que $\nabla f(\bar{x})$ es perpendicular a una superficie de ecuación $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que todos los planos tangentes a la superficie de ecuación $z = xf(\frac{x}{y})$, $y \neq 0$, pasan por el origen.

c) Encuentre la ecuación del plano tangente a la curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

P3 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Diremos que f es homogénea de grado p si

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ t > 0)\ f(tx) = t^p f(x)$$

Mostraremos que f es homogénea de grado p si y sólo si $(\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})\ J_f(x)x = pf(x)$. Para ello,

$\Rightarrow$: Defina $\phi(t) = f(tx)$ y derive de dos formas distintas.

$\Leftarrow$: Muestre que $\phi(t)t^{-p}$ es constante.

P4 *a)* Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Considere que el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^3$ está descrito por la ecuación

$$\dot{x}(t) = -\nabla\phi(x(t))$$

donde $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase $\mathcal{C}^1$ que denota la posición de la partícula en el tiempo y supongamos que la posición inicial de la partícula es $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que $\phi(x(t))$ es decreciente en el tiempo. Muestre además que

$$\phi(x(t)) + \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds \quad = \quad \phi(x_0) \qquad [1]$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Considere el problema

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} &= kf \\ f(x,0) &= \pi \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es constante. Encuentre una expresión para f a través de la transformación $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

[1] La norma usada es la euclidiana.