**MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**
**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.
**Auxiliares:** Simón Pigaz- Valentín Retamal.
**Fecha:** 29 de Diciembre 2014 .

# Pauta Control 1

**P1** Comente las siguientes proposiciones. Si es verdadera demuéstrela; en caso contrario de un contraejemplo. Para todas ellas considere $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

1. Sea $A \subseteq E$ abierto y sea $x_0 \in A$. Entonces $A \setminus \{x_0\}$ es abierto.
2. Sean $A, B \subseteq E$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $int(A) \subseteq int(B)$.
3. Sean $A \subseteq B \subseteq E$. Entonces $Fr(A) \subseteq Fr(B)$.
4. Sea $X \subseteq E$ y $x_0 \in Fr(X)$ con $x_0 \notin X$. Entonces $x_0$ es punto de acumulación de $X$.
5. Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$. Entonces $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \widehat{A \cup B}^{\circ}$
6. Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$. Entonces $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

**Sol:**

(Cada afirmación 1 punto)

a La afirmación es verdadera:

Forma 1: Sea $x \in A \setminus \{x_0\}$, queremos probar que existe un $\delta$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A \setminus \{x_0\}$.

Como $A$ es abierto, existe $\epsilon$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$. Consideremos ahora $\delta = min\{\epsilon, \frac{\|x - x_0\|}{2}\}$. La bola $B(x, \delta) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq A$. Y además, $x_0 \notin B(x, \delta)$, por lo que $B(x, \delta) \subseteq A \setminus \{x_0\}$.

Forma 2: Sabemos que $A \setminus \{x_0\} = A \cap \{x_0\}^c$. Como $\{x_0\}$ es un singleton es cerrado, luego, $\{x_0\}^c$ es abierto. Luego, intersección finita de abiertos es abierta, por lo que $A \cap \{x_0\}^c = A \setminus \{x_0\}$ es abierto.

b La afirmación es verdadera:

Sea $x \in Int(A)$, luego, existe $\delta$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A \subseteq B$. Por lo tanto, $B(x, \delta) \subseteq B$, es decir, $x \in Int(B)$.

c La afirmación es Falsa.

Basta tomar $A = (0, 2), B = (0, 3)$, así: $Fr(A) = \{0, 2\} \not\subseteq Fr(B) = \{0, 3\}$.

d La afirmación es verdadera.

Como $Fr(X) = Adh(X) \setminus Int(X)$ tenemos que $x_0 \in Adh(X)$. Recordemos que $Adh(X) = X' \cup X$, por lo que $x_0 \in X' \ \vee \ x_0 \in X$, sin embargo esta última opción sabemos que no es posible por enunciado. Luego: $x_0 \in X'$.

e La Afirmación es Falsa:

Basta tomar $A = [0, 1], B = [1, 2]$. En este caso: $Int(A) = (0, 1), Int(B) = (1, 2), Int(A \cup B) = (0, 2)$. Con ello tenemos: $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0, 1) \cup (1, 2) \neq (0, 2) = Int(A \cup B)$.

f La afirmación es Verdadera.

Se demuestra por doble inclusión: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$\subseteq$) Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Luego $x \in \overline{A} \ \vee \ x \in \overline{B}$. Sin pérdida de generalidad tomemos el primer caso, $x \in \overline{A}$, luego, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \to x$. Es evidente que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cup B$, por lo que $x \in \overline{A \cup B}$.

$\supseteq$) Sea $x \in \overline{A \cup B}$. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ tal que $x_n \to x$. Cada elemento de la sucesión pertenece a $A$ o a $B$. Como la sucesión es infinita entonces $A \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser infinito o $B \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser infinito (si ambos son finitos, la sucesión sería finita). Sin pérdida de generalidad supongamos que $A \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita, en tal caso, este conjunto forma una subsucesión de $x_n$ que llamaremos $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Como es una subsucesión se tiene que $x_{n_k} \to x$, por lo que se concluye que $x \in \overline{A}$.

(Asumiendo que $B \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito, se tiene análogamente que $x \in \overline{B}$).

Es decir, dependiendo del caso $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$, por lo que finalmente $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

**P2** 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $T : E \to E$ una función. Demuestre que si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ veces}}$ es contractante entonces $T$ posee un único punto fijo en $E$.

2. Considere la ecuación diferencial:

$$(1)\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

En que $u_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

Usando el teorema del punto fijo, muestre que si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y satisface que $|f(s,u) - f(s,v)| \leq k|u - v|$ entonces (1) tiene solución y encuentre un método iterativo para encontrarla.

**Sol:**

*a*) (3 puntos) Como $T^k : E \to E$ es una función contractante y $E$ es espacio de Banach, por el TPFB ésta tiene un único punto fijo en $E$, es decir,

$$(\exists!\ \bar{x} \in E)\ T^k(\bar{x}) = \bar{x}$$

Si aplicamos una vez $T$ a ambos lados de la ecuación, y notando que $T^{k+1} = T^k \circ T$ por definición de composición, tenemos que

$$T^k(T(\bar{x})) = T(\bar{x})$$

En otras palabras, $T(\bar{x})$ también es punto fijo de $T^k$, pero como por el teorema éste debe ser único, necesariamente se debe tener que

$$T(\bar{x}) = \bar{x}$$

Para ver que es único, tomamos $x_0, y_0 \in E$ tales que $T(x_0) = x_0$ y $T(y_0) = y_0$. Resulta claro que $T^2(x_0) = T(T(x_0)) = T(x_0) = x_0$, por lo que si procedemos inductivamente para todo $n \geq 1$ $x_0$ e $y_0$ son puntos fijos de $T^n$, en particular de $T^k$. Pero ya vimos que $T^k$ tiene sólo un punto fijo, luego necesariamente $x_0 = y_0$.

*b*) (3 puntos) Como $f$ es continua, $u'$ es también continua, luego podemos integrar la ecuación $u'(x) = f(x, u(x))$ de forma que queda

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} u'(t)dt &= \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt \\ u(x) - u(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt \\ u(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt + u_0 \end{aligned}$$

Definimos entonces el operador $\mathcal{L} : (\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, dado por

$$\mathcal{L}[v](x) = \int_{x_0}^{x} f(t, v(t))dt + u_0$$

Trabajamos en este entorno de $x_0$ para asegurar que el operador es contractante. En efecto, dadas $v, w \in \mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}[v]-\mathcal{L}[w]\|_\infty &= \left\|\left(\int_{x_0}^{x} f(t,v(t))dt+u_0\right)-\left(\int_{x_0}^{x} f(t,w(t))dt+u_0\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|\int_{x_0}^{x}[f(t,v(t))-f(t,w(t))]dt\right\|_\infty \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t,v(t))-f(t,w(t))\|_\infty dt \\
&= \sup_{t\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |f(t,v(t))-f(t,w(t))|(x-x_0) \\
&\leq \sup_{t\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} k|v(t)-w(t)|\delta \\
&= k\delta\|v-w\|_\infty
\end{aligned}$$

Podemos escoger, por ejemplo, $\delta = \frac{1}{2k}$. Con esto,

$$\|\mathcal{L}[v]-\mathcal{L}[w]\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|v-w\|_\infty$$

por lo que $\mathcal{L}$ es contractante en $(\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (habiendo escogido $\delta$ apropiado). Como además el espacio $(\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach, por TPFB se tiene que $\mathcal{L}$ tiene un único punto fijo, es decir

$$(\exists!\ v \in \mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R})\ \mathcal{L}[v] = v$$

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u](x) &= \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt + u_0 \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

de forma que $u$ es el punto fijo de $\mathcal{L}$ y por lo tanto es solución de (1) en el entorno $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

**P3** 1. Determine si existen los siguientes límites:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}$ en función de $\alpha$.

2. Determine a qué función le corresponde cada gráfico y curva de nivel: (Las funciones e imágenes están en la solución).

**Sol:**

**a)** (0,75 por cada límite)

**i)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

Usando coordenadas polares se obtiene:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^5 - 2(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))^3}{(r^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5(\cos^5(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin^3(\theta))}{r^4}$$
$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^5(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)) = 0$$

Ya que $r \to 0$ y el resto es acotado, por lo que el limite es 0.

**ii)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}$

Usando coordenadas polares se obtiene:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^4}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^4\sin^4(\theta)}}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta) + r^2\sin^4(\theta)}} = \frac{0}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} = 0$$

Ya que $r \to 0$ y para todo $\theta$ eso es 0; y en caso de que $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, en cuanto se hizo el cambio a polares se puede ver que eso es cero para todo $r$, luego no se indefine; por lo que el limite es 0.

**iii)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2}\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^4-y^4}(x^2-y^2)$$

usando el límite conocido $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+1)}{u} = 1$, con $u = x^4 - y^4$ se tiene:

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2)(1) = 0.$$

**iv)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}$ en función de $\alpha$

Usando coordenadas polares se obtiene:

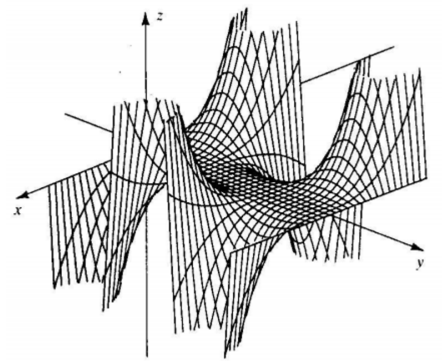
$$\lim_{r\to 0} \frac{|(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))|^\alpha}{(r\cos(\theta))^2 - (r\cos(\theta))(r\sin(\theta)) + (r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{|r|^{2\alpha}|\cos(\theta)\sin(\theta)|^\alpha}{r^2(\cos^2(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta)}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{|r|^{2\alpha-2}|\cos(\theta)\sin(\theta)|^\alpha}{1-\cos(\theta)\sin(\theta)}$$

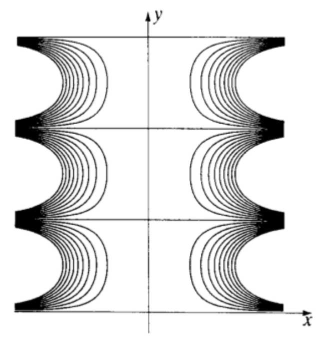
Donde cabe notar que la expresión se indefiniría si $\cos(\theta)\sin(\theta) = 1$, pero tal caso no se da, ya que $\cos(\theta)\sin(\theta) < 1$. Luego la existencia del límite depende de $2\alpha - 2$, de este modo, se tienen 3 casos: $2\alpha - 2 > 0$, $2\alpha - 2 = 0$ y $2\alpha - 2 < 0$; que se traducen en:

- ⋄ $\alpha > 1$ :
  Se tiene $|r|^\beta, donde\beta = 2\alpha - 2 < 0$, luego, $|r|^\beta \to 0$ y el resto de la expresión es acotada; por lo que el límite es cero.
- ⋄ $\alpha = 1$ :
  El límite sería $\dfrac{|\cos(\theta)\sin(\theta)|}{1-\cos(\theta)\sin(\theta)}$; y sería para todo $\theta$, luego por unicidad del límite, decimos que el límite no existe.
- ⋄ $\alpha < 1$ :
  En este caso se tiene que $|r|^\beta$ diverge y el resto de la expresión es acotada; por lo que el límite no existe.

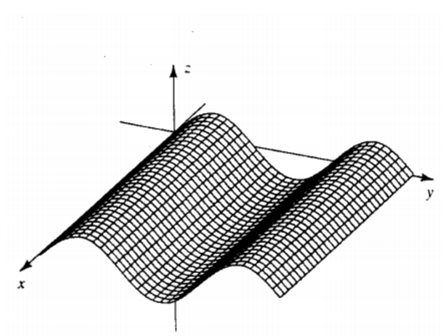
**b)** (0,5 por cada ligazón función-gráfico-curva de nivel)

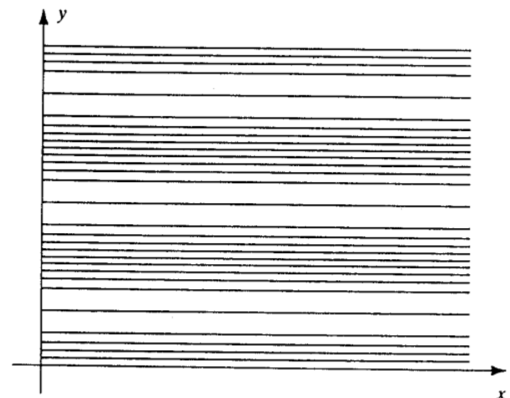
**a)** $z = -\frac{1}{9}x^3 \sin(y)$ **5)** **Figure 32)**



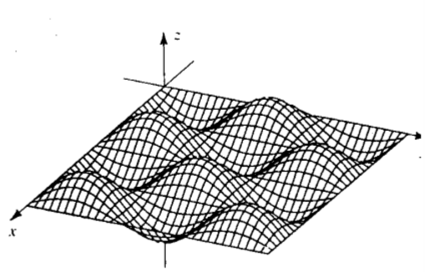


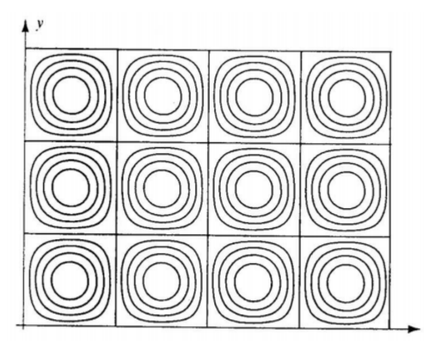
**b)** $Z = \sin(y)$ **6)** **Figure 35)**



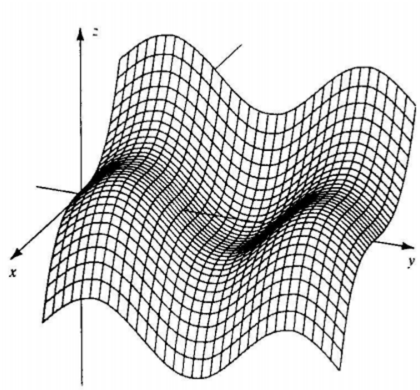


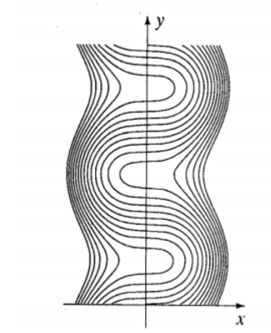
**c)** $z = -\sin(x)\sin(y)$ **1)** **Figure 33)**



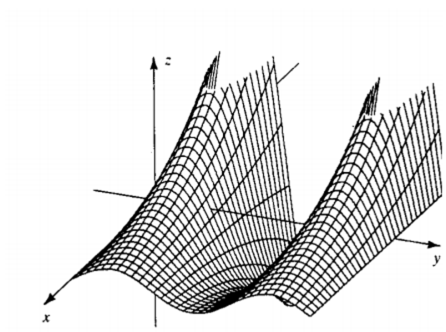


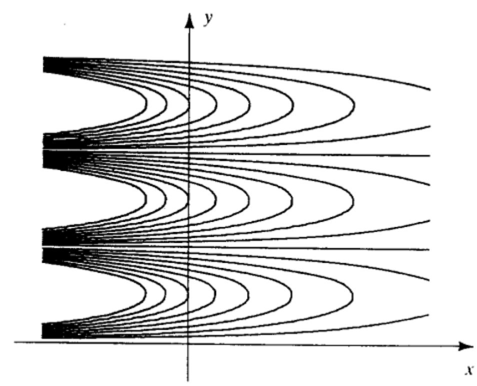
**d)** $Z = \sin(y) - \frac{1}{9}x^3$ **3)** **Figure 30)**




**e)** $Z = 3e^{-\frac{x}{5}}\sin(y)$ **2)** **Figure 31)**




**f)** $Z = \frac{1}{2}x^2 + \sin^2(y)$ **4)** **Figure 34)**