

Pl. Auxiliar 4.
e)

Veremos si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2}$ existe, en función de α .

Primero, notamos que $\frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} = \frac{1}{\frac{x(x^2+1)}{|y|^\alpha} + \frac{|y|^{4-\alpha}}{x}} \quad (*)$

Luego, hay dos situaciones "convenientes": $\alpha=0$ y $\alpha=4$.

$\alpha=0$: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^4+y^4+x^2}$. Basta tomar la trayectoria $y=mx$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^4(1+m^4)+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3(m^4+1)+x} = \pm \infty$$

Luego, para $\alpha=0$ el límite no existe.

$\alpha=4$: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^4+y^4+x^2}$. Tenemos que $\left| \frac{xy^4}{x^4+y^4+x^2} \right| \leq \left| \frac{xy^4}{y^4} \right| = |x|$

Luego $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^4+y^4+x^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$, por lo que

para $\alpha=4$ el límite sí existe.

$0 < \alpha < 4$: Tomemos la sucesión $(x_n, y_n) = (ct_n^\alpha, t_n)$ tal que $t_n \rightarrow 0$. Es una trayectoria válida pues $(0,0)$ es punto de acumulación de ella. Luego

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ct_n^\alpha(c^2t_n^2+1)}{|t_n|^\alpha} + \frac{|t_n|^{4-\alpha}}{ct_n^\alpha}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pm C(c^2t_n^2+1) + \frac{|t_n|^{4-2\alpha}}{C}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{\pm C^4t_n^2 + C^2 + |t_n|^{4-2\alpha}}$$

Si $4-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 2$, entonces el límite nos da $\pm \frac{1}{C}$, luego no puede existir, pues depende de C .
 Si $4-2\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$, el límite nos da 0 . Esto nos dice que, de existir, el límite es 0 . No podemos decir que existe, pues sólo vimos una posible trayectoria. Para $\alpha > 2$, tenemos:

$$\frac{1}{\frac{x(x^2+1)}{|y|^\alpha} + \frac{|y|^{4-\alpha}}{x}} : \quad \text{Si } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{|y|^\alpha} = K \in [0, \infty), \text{ entonces}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|^\alpha}{x} = \frac{1}{K} \quad \text{Luego,}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|^{4-\alpha}}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|^\alpha}{x} |y|^{4-2\alpha} = \infty$$

$$\rightarrow \frac{1}{K} \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \alpha > 2)$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} = 0$$

Por otro lado, si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{|y|^\alpha} = \infty$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|^{4-\alpha}}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|^\alpha}{x} \cdot |y|^{4-2\alpha} = \infty$$

$$\rightarrow \infty \rightarrow \infty \quad (\text{pues } \alpha > 2)$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} = 0 \quad \text{Es análogo para } -\infty.$$

Luego, para $\alpha > 2$ el límite siempre existe. Para $\alpha \geq 4$ se tiene como consecuencia de ello. Simos que para $\alpha \leq 2$ el límite no existe, lo cual es cierto incluso para $\alpha < 0$. Así, el problema se resuelve como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 2 \\ \nexists & , \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Auxiliar 5.

P2. b) Primero mostraremos que si X es un conjunto conexo y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es conexo.

Escribimos $f(X) = A \cup B$, con $A, B \subseteq Y$ ^{no vacíos} abiertos. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, con $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ abiertos (pues f es continua) disjuntos, lo que contradice que X es conexo.

Ahora probamos que si Y satisface que $(\forall x, y \in Y)(\exists f: [0,1] \rightarrow Y \text{ continua}) f(0) = x \wedge f(1) = y$ entonces Y es conexo.

Escribimos $Y = A \cup B$, con A, B ^{no vacíos} abiertos disjuntos. Sea $f: [0,1] \rightarrow Y$ continua tal que $f(0) \in A, f(1) \in B$. Luego $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = [0,1]$, con $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ abiertos, pues f es continua, disjuntos y no vacíos. Esto contradice que $[0,1]$ sea conexo, luego Y debe ser conexo.

A un conjunto Y que satisface lo anterior se le dice conexo por caminos. Es decir, conexo por caminos $\Rightarrow$ conexo (encuentre un ejemplo que muestre que la recíproca no es cierta).

P4. Veamos que $(A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es completo, con $A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotado}\}$.

Para ello, sea $\{f_n\}_n \subseteq A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy.

a) Tenemos que $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_n(x) - f_m(x)|$

Luego, es claro que $\{f_n(x)\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es espacio de Banach, $f_n(x)$ converge a un límite $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Denotamos $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

b) Veamos que f , definida arriba, es acotado (i.e., $f \in A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall m, n \geq n_0) \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{1}{2}$. Luego,

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) |f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty.$$

Como $(\forall n \geq n_0) \|f_n - f_{n_0}\|_\infty < \frac{1}{2}$, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| = \left| \lim_n f_n(x) - f_{n_0}(x) \right| = \lim_n |f_n(x) - f_{n_0}(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - f_{n_0}(x)| = \|f - f_{n_0}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

Así, $|f(x)| \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$ (pues f_{n_0} es acotada)

Esto es para todo x , luego f es acotada. Finalmente, probamos

c) que $f_n \rightarrow f$, es decir, que $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Sean $\varepsilon > 0$ y n_0 tales que para $m, n \geq n_0$ tenemos $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$.

Luego $(\forall n \geq n_0) |f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

PROARTE