

Ejercicios.

Espacios Vectoriales Normados y Topología:

1. Dado $p \in P_n(\mathbb{R})$, con $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$, definimos las funciones
- $$\|p\|_1 = \sum_{i=0}^n |\alpha_i| \quad \text{y} \quad \|p\|_2 = \max_{0 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

a) Muestre que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes.

b) Sean la matriz $A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ y la función $L_A: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ tal que

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \mapsto L_A(p) = \sum_{i=0}^n \beta_i x^i$$

donde $\beta = A\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Demuestre que el conjunto $\text{Ker}(L_A) = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : L_A(p) = 0\}$ es cerrado (use dos argumentos distintos para ello).

c) Sea $P = \bigcup_n P_n$. Demuestre que $\|p\|_2 \leq \|p\|_1$ pero que las normas no son equivalentes en este espacio. Para ello, use $p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} x^i$.

d) Para la norma dada por $\|p\|_0 = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$ y el conjunto $M = \{\lambda \tilde{p} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, donde $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n x^i$, determine $M \cap B_0(0,1)$.

2. Determine la adherencia e interior de los conjuntos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y \leq 1\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$

d) $\mathbb{Z}$

e) $\mathbb{Q}$

3. Decimos que un conjunto A es denso en B si se cumple que $\text{adh}(A) = B$. Muestre que son equivalentes:

i) A es denso en B

ii) $A \subseteq C \wedge C \text{ cerrado} \Rightarrow C = B$

iii) $(\forall V \text{ abierto}) A \cap V = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$.

Ya definimos lo que es un conjunto conexo. Muestre que X es conexo $\Leftrightarrow$ Los únicos conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente son $\emptyset$ y X .

Diremos que un conjunto C es convexo si $(\forall x, y \in C)(\forall \lambda \in [0, 1]) \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$

a) Muestre que la intersección arbitraria de convexos es convexa.

b) Muestre que la unión de $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ convexos no decrecientes (i.e., $C_\alpha \subseteq C_\beta, \forall \alpha \leq \beta$) es convexa.

c) Muestre que si C es convexo, entonces $\text{adh}(C)$ y $\text{int}(C)$ también son convexos.

4 a) Sea $\|\cdot\|$ una norma para $C([a,b])$, con $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} e^{-x} |f(x)|$.
Muestre que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

b) Sea $\|\cdot\|$ en $E = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$, con $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.
Muestre que $(E, \|\cdot\|)$ es un e.v.n. y que $\|\cdot\|$ con $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.

5. Sean H un e.v.p.i. que es Banach con respecto a la norma que induce el producto interno (se dice que H es espacio de Hilbert), y sea $f: H \rightarrow H$ una función tal que existen $\alpha, \beta > 0$ con

$$i) \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

$$ii) \|f(x) - f(y)\| \leq \beta \|x - y\|$$

para todo $x, y \in H$. Veremos que f es biyectiva. Para ello:

a) Pruebe que f es inyectiva.

b) Para ver que f es sobreyectiva, dados $y \in H, \lambda > 0$ defina $\phi_{y,\lambda}: H \rightarrow H$

$$\phi_{y,\lambda}(x) = x - \lambda(f(x) - y)$$

b.i) Muestre que existe $\lambda > 0$ tal que $\phi_{y,\lambda}$ es contractante.

b.ii) Concluya la sobreyectividad.

6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Probaremos que
 $\text{adh}(B(0,1))$ es compacto $\Leftrightarrow \dim(E) < \infty$

Para ello,

a) Suponga que $\text{adh}(B(0,1))$ es compacto. Sea entonces
 que $(\exists \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in E) B(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \frac{1}{2}) \subseteq F + \frac{1}{2}B(0,1)$, donde
 F es el s.e.v. generado por $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

b) Deduzca que $B(0,1) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F + \frac{1}{2^n} B(0,1)) = \text{adh}(F)$.

Para ello, muestre que si $A \subseteq E$, entonces $\text{adh}(A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (A + B(0, \varepsilon))$.

c) Concluya.

Límites de funciones:

1. Calcule, si existe:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2 - 2y^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

2. Sea $T: (C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$
 $f \mapsto T(f) = f'$

Muestre que T no es continua. Para ello, considere la sucesión
 $\left\{ \frac{1}{n} \sin(nx) \right\}_n \subseteq C^1([a,b])$.

3. a) Demuestre que $(\exists! x \in [0,1]) \cos(\cos(x)) = x$

b) Muestre que $(\exists! f \in C([0, \frac{1}{2}])) f(x) = 5 + \int_0^x \sin(f(s) + s) ds$

(Para a) y b) use el teorema del punto fijo de Banach).

4. Estudie las curvas de nivel de las funciones:

i) $f(x,y) = x+y$

ii) $f(x,y) = 2x - 3y$

iii) $f(x,y) = 2y + \ln|x|$

iv) $f(x,y) = x^2 - y^2$