MA2001-1 Semestre 2015-03
Profesor: Marcelo Leseigneur P
Auxiliares y Ayudantes: Simón Piga, Valentin Retamal, Obed Ulloa

Auxiliar 5
Abiertos, Cerrados, Espacios de Funciones

P1.

Considere los siguientes conjuntos y diga si son abiertos, cerrados o ninguna de los dos. Utilice las distintas carateterizaciones de abiertos y cerrados (Bolas, sucesiones, Unión, Intersección, etc...).

a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

b) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$

c) Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo: $A_3 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(x) \leq c\ \forall x \in [0, 1]\} \subseteq (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

d) $A_4 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f \equiv cte\} \subseteq (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

e) Sea $x_0 \in [0, 1]$, $A_5 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(x_0) = c\} \subseteq (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

f) Sean $(X, d), (Y, h)$ espacios métricos, y sea $f : X \to Y$ continua. Si $A \subseteq Y$ abierto, que ocurre con $f^{-1}(A)$?.

g) En el mismo contexto que antes. Si $B \subseteq X$ es abierto, $f(B)$ es abierto?

P2.

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que $Y \subseteq X$ es **disconexo** si y solo si existen A, B abiertos disjuntos no vacíos, tales que $X = A \cup B$. En caso contrario, se dirá çonexo".

a) Demuestre que Y es disconexo si y solo si existe una función $f : Y \to \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva.

b) Suponga que $[0, 1]$ es conexo. Sea Y un conjunto que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in Y,\ \exists f : [0, 1] \to Y \text{ continua con: } f(0) = x \wedge f(1) = y$$

Pruebe que Y es conexo.

P3.

Sean X, Y e.v.n, con Y Banach. Pruebe que $\mathcal{L}(X, Y)$ es Banach.

P4.

El objetivo de este problema es probar que $(\mathcal{A}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$, el espacio de las funciones acotadas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, es Completo. Para eso vamos por pasos:

Tomemos una sucesión f_n de Cauchy, probaremos que tiene límite.

a) Pruebe que para todo $x \in [0,1]$, $f(x)$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$). Concluya que para $f(x)$ converge para todo x.

b) Defina: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Demuestre que f es acotada.

c) Para terminar, pruebe que $f_n \to f$ en norma $\|\cdot\|_\infty$