MA2001-1. Cálculo en Varias Variables 2014.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Simón Piga - Valentín Retamal
Fecha: 17 de Diciembre de 2014

Auxiliar 3

P1 Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a n. Para un elemento $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ de este espacio se definen las funciones

i) $\|p\|_0 = \int_0^1 |p'(t)|dt + |p(0)|$

ii) $\|p\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$

iii) $\|p\|_\infty = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$

a) Muestre que las funciones anteriores son normas en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

b) Encuentre un $L > 0$ tal que, para todo $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $\|p\|_0 \leq L\|p\|_\infty$.

c) Muestre que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

d) ¿Es $\|p\|_3 = |p(0)|$ una norma?

P2 Consideremos el espacio $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_1$ usual.

a) Sea la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -2^n(x - \frac{1}{2}) + 1 & , \ x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^n\right] \\ 0 & , \ x \in \left(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^n, 1\right] \end{cases}$$

Demuestre que $\{f_n\}_n$ es de Cauchy con $\|\cdot\|_1$.

b) Muestre que $\{f_n\}_n$ no converge en norma.

c) Dé otro ejemplo de un espacio normado en que ocurra lo anterior. ¿Qué tienen en común?

P3 Considere los espacios $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ : \ \int_{\mathbb{R}} |f|^p < \infty \right\}$ con las normas $\|\cdot\|_p$ usuales.

a) Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$ y $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{C}_q(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

b) Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Muestre que si $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ y $f \in \mathcal{C}_p \cap \mathcal{C}_q$, entonces

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^{\lambda p} \|f\|_q^{(1-\lambda)q}$$