MA2001-1 Semestre 2015-03
Profesor: Marcelo Leseigneur P
Auxiliares y Ayudantes: Simón Piga, Valentin Retamal, Obed Ulloa

Auxiliar 2
Espacios Métricos, Normados y Convergencias

P1.

Sean E y F e.v.n. Diremos que una sucesión de funciones $f_n : E \to F$ *converge puntualmente* a f si y solo si $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$.

Argumente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas. Entonces: f_n converge puntual a f si y solo si f_n converge en norma $\|\cdot\|_\infty$.

b) Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas. Luego, si f_n converge puntual a f entonces converge en norma $\|\cdot\|_1$
Recuerde: $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(x)|dx$

P2.

Sea p un número primo cualquiera (positivo). Se sabe que para cualquier $x \in \mathbb{Q}$ distinto de cero existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x = \frac{r}{s}p^k$$

donde p no divide ni a r ni a s (Ambos enteros). Se define la función $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-k} & \text{si } x \text{ no es cero, y } k \text{ es el de la descripción anterior} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que:

a) $|\cdot|_p$ es define una métrica en $\mathbb{Q}$. Esta métrica es conocida como la métrica de los números p-ádicos.
Indicación: Pruebe que cumple una desigualdad aún más fuerte que la triangular:
$|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$. Las métricas que cumplen esta propiedad se llaman ultramétricas.

b) Pruebe que para un bola cualquiera, todos sus puntos son centros de la bola.

c) Demuestre que la Serie: $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \ldots$ converge a -1 en la métrica anterior con $p = 2$.

d) Pruebe que para toda suseción $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ que converge en la métrica $|\cdot|_p$, se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es de Cauchy (en la misma métrica).

P3.

Considere el espacio:

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \text{ converge} \right\}$$

a) Demuestre que $< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ define un producto interno en ℓ^2.

b) Se dice que dos vectores x, y son ortonormales si:

$$< x, y > = 0$$
$$< x, x > =< y, y >= 1$$

Demuestre que existe una serie de vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^2$ tales que:

- $\forall n \neq m \ \ < e_n, e_m >= 0$
- $\forall n \ \ < e_n, e_n >= 1$
- $\forall x \in \ell^2, \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k = x$

(Esto no le suena familiar??)