Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre de Primavera 2009
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla

Tarea 1 - MA2001

P1. Demostrar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ no es convexo. (hacer un dibujo de este conjunto). Deducir de ello que:

$$\|(x,y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$

No es una norma en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué condición falla?
NOTA: *Si E es un espacio vectorial y $A \subseteq E$ se dice convexo si se cumple que $\forall x, y \in A$ $\forall \lambda \in [0,1]$ se tiene $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$*

P2. Sea $\|\cdot\|$ la norma euclideana y d la métrica inducida por esta norma en el plano $\mathbb{R}^2$. Considere la función e definida por

$$e(x,y) := \begin{cases} \|x\| + \|y\| & \text{si } \|x\| \neq \|y\| \\ d(x,y) & \text{si } \|x\| = \|y\| \end{cases}$$

a) Pruebe que e es métrica en $\mathbb{R}^2$
b) Dibuje $B_e(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^2 : e(u,0) < 1\}$.

P3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Definamos $\|\vec{x}\|_L = \|L(\vec{x})\|$ donde L una función lineal de E en E tal que $L(\vec{x}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$ (es decir, que sea inyectiva). Pruebe que $\|\cdot\|_L$ es una norma sobre E.

P4. Estudiar si las siguientes definen una norma en $\mathbb{R}^2$:

a) $\|(x,y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2}$
b) $\|(x,y)\| = \sqrt{|x| + |y|}$
c) $\|(x,y)\| = |x| + \left|\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right|$
d) $\|(x,y)\| = \sqrt{(x-y)^2 + y^2}$

P5. Sea S el conjunto de las sucesiones a valores reales indizadas por $\mathbb{N}$.

a) Definamos el conjunto $\ell_0^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S : \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0\ \forall n \geq n_0\}$.
Demuestre que ℓ_0^∞ es espacio vectorial y que $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ es norma en ℓ_0^∞.

1) ℓ_0^∞ es espacio vectorial.
2) $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ es norma en ℓ_0^∞

b) Definamos el conjunto $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S : \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.

Demuestre que ℓ^1 es espacio vectorial y que $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n|$ es norma en ℓ^1.

1) ℓ^1 es espacio vectorial.
2) $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n|$ es norma en ℓ^1.

c) pruebe que $\ell_0^\infty \subsetneq \ell^1$.
d) Determinar si $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes sobre ℓ_0^∞.

P6. Demueste que la norma en un espacio vectorial normado E, que proviene de un producto interno, verifica la igualdad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ \forall x, y \in E$$

Además pruebe que si E es un e.v.n. sobre $\mathbb{R}$ entonces se cumple la identidad polar, es decir:.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

P7. Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ a coeficientes reales. Se define para $A, B \in E$ las siguiente función:

$$\langle A, B \rangle = Traza(AB^t)$$

Pruebe que dicha función es un producto interno en E.

P8. Teorema de Dirichlet
El propósito de este problema es demostrar el siguiente teorema.
Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\{\lambda_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}_+$ y $\{x_n\}$ una sucesión en X tales que

1. $\{\lambda_n\}$ es monótona y $\lambda_n \to 0$.
2. La sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ es acotada en X.

Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge.

Indicación: Defina $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ y muestre que si $n > m$ se tiene que

$$y_n - y_m = \lambda_n s_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k - \lambda_{m+1} s_m$$

P9. Sea $\{f_n\}$ la sucesión decreciente de funciones continuas dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pruebe que $\{f_n\}$ es $\|\cdot\|_1-$Cauchy pero que no converge.
Para ello pruebe y utilice que

$$\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| \leq \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n, h \in \mathbb{N}$$

P10. Sea (X, d) un espacio de Banach y sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados decrecientes no vacíos y tales que:

$$diam(F_n) = Sup\{\|x-y\| : \ x, y \in F_n\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $x_n \in F_n$ cualquiera, luego pruebe que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

b) Pruebe que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

c) Pruebe que $\exists! \, x_0 \in X$ tal que $x_0 \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Concluya que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$.

P11. Considere $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Sean $M, N \subseteq H$ s.e.v. cerrados. Suponga que M y N cumplen que $M \perp N$, es decir, $\langle x, y \rangle = 0$ $\forall x \in M, y \in N$. Pruebe que $M + N$ es cerrado.
Recuerdo: $M + N = \{z \in H : \exists x \in M, y \in N \text{ tal que } z = x + y\}$

P12. Considere $\mathbb{R}^n$ con un norma cualquiera $\|\cdot\|$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contractante, es decir:

$$\exists k \in (0,1) \text{ tal que } \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Nuestro objetivo es demostrar el Teorema del Punto Fijo de Banach para $\mathbb{R}^n$ que dice que dada una función f contractante de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, existe un único punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^*) = x^*$.
Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, considere la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \geq 1$

a) Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$.

b) Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \dfrac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre que $x_n \to x^*$ tal que $f(x^*) = x^*$.

d) Demuestre que x^* es único. Concluya el resultado

P13. Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n+1} \right\}$, $B = A \bigcup \{0\}$. Pruebe que A no es cerrado ni abierto. Pruebe que B es cerrado pero no abierto. Pruebe que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

P14. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., demuestre que:

a) Sea $x_0 \in E$ y $r > 0$. Entonces $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_o\| < r\}$ es abierto en E

b) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, Sea $F \subseteq E$ un conjunto cerrado. Pruebe que F también es completo.

c) Si $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ con A abierto y B cualquiera entonces $A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ y \in B\}$ es abierto.

d) Sea $x_0 \in E$. Entonces conjunto $\{x_0\}$ es cerrado.

e) Definamos la distancia de un punto $x \in E$ a un conjunto $A \subseteq E$ como la cantidad
$d_A(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$. Demuestre que $Adh(A) = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$.

f) Sea $X \subseteq E$ un conjunto cerrado y sea $r > 0$ un real fijo.
Sea $Y = \{y \in E : \|x - y\| = r \text{ para algún } x \in X\}$. Entonces Y es cerrado.

P15. Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n+1} \right\}$, $B = A \bigcup \{0\}$. Pruebe que A no es cerrado ni abierto. Pruebe que B es cerrado pero no abierto. Pruebe que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

P16. Considere el espacio $(R^2, \|\cdot\|_2)$. Para cada conjunto A, determine el interior, adherencia y frontera. Indique si son abiertos o cerrados . Dibuje cada conjunto.

(i) $A = \{(x_1, x_2) : \ x_1 \cdot x_2 = 0\}$

(ii) $A = \{(x_1, x_2) : \ x_1 + x_2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

(iii) $A = \{(x_1, x_2) : \ x_1^2 - x_2^2 < 1\}$

(iv) $A = \{(x_1, x_2) : \ |x_2| < 1,\ x_1 \leq x_2\}$

P17. Sea $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}((n^2, 0), n)$ y sea $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4,\ x + y = -1\}$.
Determine si A_1, A_2 es abierto o cerrado.

P18. Si A es un abierto en $(E, \|\cdot\|)$. Demuestre que $int(\partial(A)) = \emptyset$.

P19. Determinar el dominio, rango y trazar las curvas de nivel de las funciones:

a) $f(x,y) := x + y$.
b) $f(x,y) := x^2 + 4y^2$.
c) $f(x,y) := x^2 - y^2$.
d) $f(x,y) := xy$.
e) $f(x,y) := \sqrt{9 - 3x^2 - y^2}$.
f) $f(x,y) := y - \sin x$.
g) $f(x,y) := \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$.
h) $f(x,y) := e^y - e^x$.

P20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

a) Determine el dominio y el recorrido de f
b) Determine y grafique las curvas de nivel

P21. *a*) Las curvas de nivel de la Figura 1 corresponden a la función $z = P(x,y)$. Cuál es el valor aproximado de $P(0,-1)$ y $P(-2,1)$? Argumente.

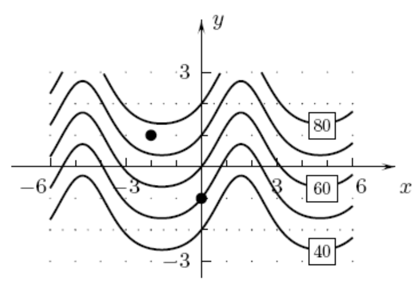

Figura 1: $z = P(x,y)$

b) La Figura 2 muestra las curvas de nivel de la función $F(x,y) = Ax + By + C$. Determine A, B y C.

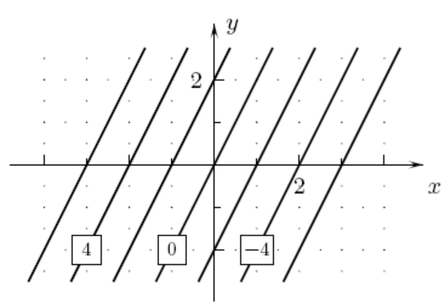

Figura 2: $F(x,y) = Ax + By + C$

P22. Encuentre la superficie y la curva de nivel correspondiente a las siguientes funciones en la figura 3

a) $z = -\dfrac{1}{9}x^3 \sin y$

b) $z = \sin y$

c) $z = -\sin x \sin y$

d) $z = \sin y - \dfrac{1}{9}x^3$

e) $z = 3e^{-x/5} \sin y$

f) $z = \dfrac{1}{2}x^2 + \sin^2 y$

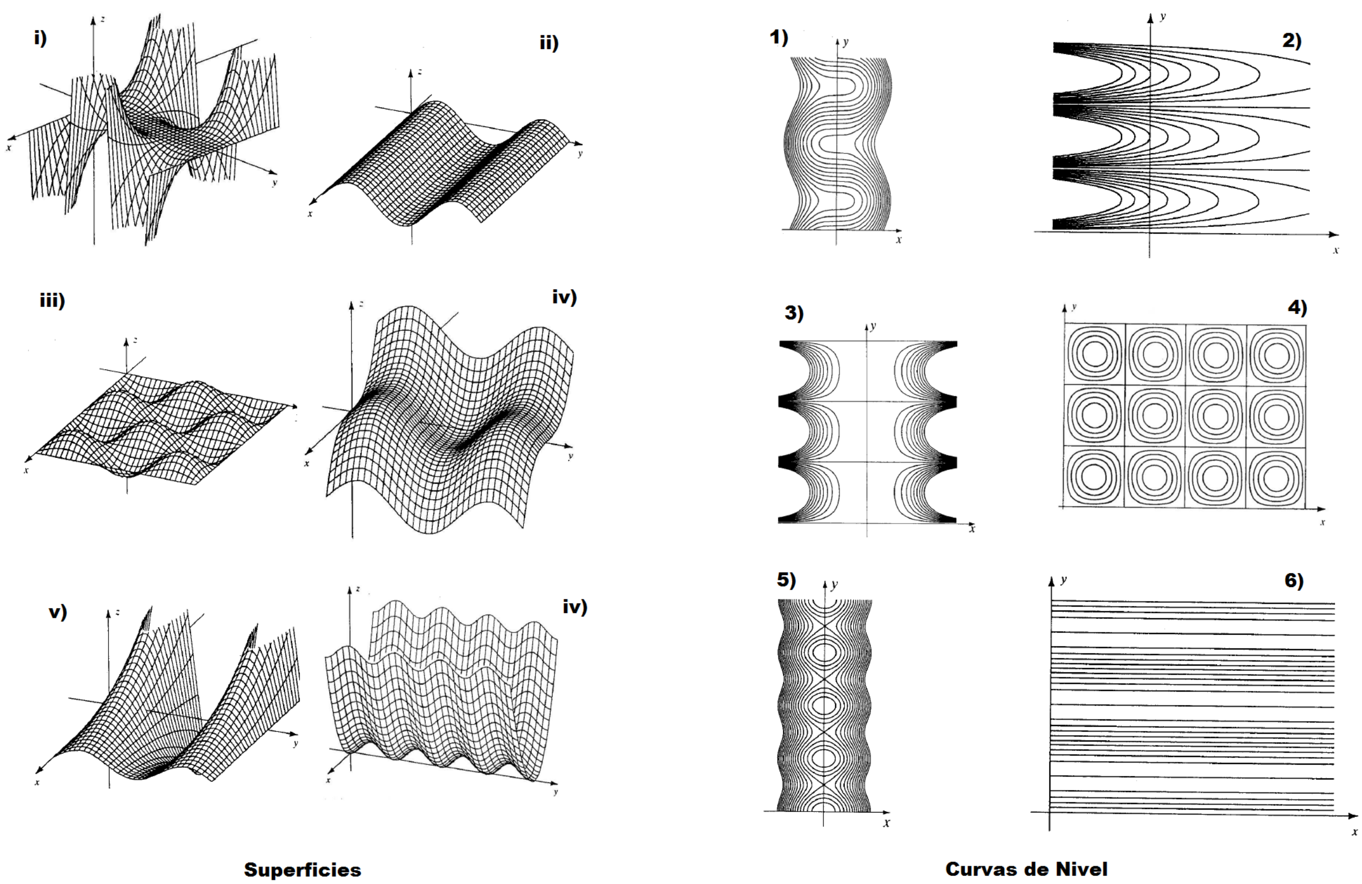

Figura 3:

P23. Determine si existe el siguiente límite y calcule su valor en caso de existir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x-y)a^n+(a-x)y^n-(a-y)x^n}{(x-y)(a-x)(a-y)}$$

P24. Estudiar la existencia del siguiente límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y}$$

P25. Determine si las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x,y)=\begin{cases}(2x^2+y^2)\sin\{\dfrac{1}{x^4+2y^2}\} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^{3/2}}{y^3+x^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cos y-y\cos x-x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

P26. Considere $H:[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$H(x,y)=\begin{cases}\tan(xy)^{\dfrac{1}{1-\tan(xy)}} & \text{si } (x,y)\neq(\frac{\pi}{4},1)\\ e^{-1} & \text{si } (x,y)=(\frac{\pi}{4},1)\end{cases}$$

Demuestre que H es continua en todo su dominio.

P27. Determine el valor de α para el cual la continuidad de la siguiente función es continua:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

P28. Sea $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y definamos $g:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ mediante:

$$g(x)=f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

a) Pruebe que g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.
Hint: Considere g restringida al conjunto $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$.

b) Pruebe que el límite:

$$\lim_{x\to 0} g(x) \text{ existe,}$$

Si y sólo si f es constante en $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$.

P29. Sean $(X, \|\cdot\|_x)$ e $(Y, \|\cdot\|_y)$ dos espacios vectoriales normados y $\phi : X \to Y$ una transformación lineal. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) ϕ continua en $x = 0$.

b) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\|\phi(x)\|_y \leq M\|x\|_x$.

c) ϕ es continua $\forall x \in X$.

P30. Sean X, Y dos espacios de Banach reales. Considere $T : X \longrightarrow Y$ una función lineal continua. Suponga que $\exists C > 0$ tal que

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \quad \forall x \in X$$

Pruebe que $\mathrm{Rg}(T)$ es cerrado. Pruebe además, que la única solución de $Tx = 0$ es $x = 0$.
Recuerdo: $\mathrm{Rg}(T) = \{y \in Y : \exists x \in X,\ Tx = y\}$

P31. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real. Para $A \subseteq H$ se define el conjunto ortogonal a A como

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in A\}$$

Pruebe que $\forall A \subseteq H$ se tiene que $A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.
Indicación: pruebe que dado $c \in H$, la función $f_c(x) = \langle c, x\rangle$ es lineal y continua en H.

P32. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C([0,1], \mathbb{R})$ tal que

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{cuando } n, m \to \infty.$$

Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Defina $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(x) = \int_0^1 K(x,y) f_n(y) dy.$$

Pruebe que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $C([0,1], \mathbb{R})$.

P33. Sean $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ definida como

$$T[f](s) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt \quad \forall s \in [a,b]$$

a) Pruebe que T está bien definida, es decir, que $\forall f \in C([a,b])$ se tiene que $T[f] \in C([a,b])$.

b) Pruebe que $T : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ es continua. ¿Lo es con la norma $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio de llegada? ¿por qué?

c) Pruebe que $I = \{f \in C([a,b]) : T[f] = f\}$ es un conjunto cerrado para la norma $\|\cdot\|_\infty$.