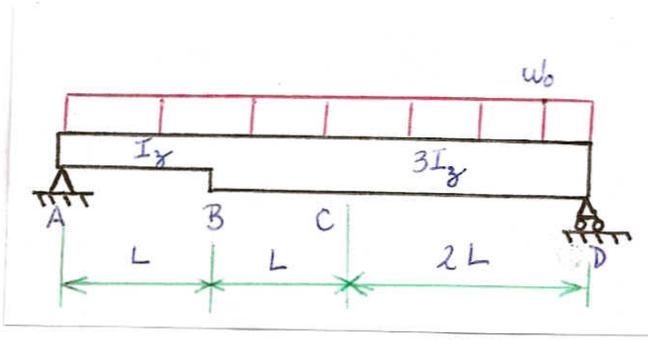
Control 3. Resistencia de Materiales ME

17/06/2008

Profesor: Roger Bustamante

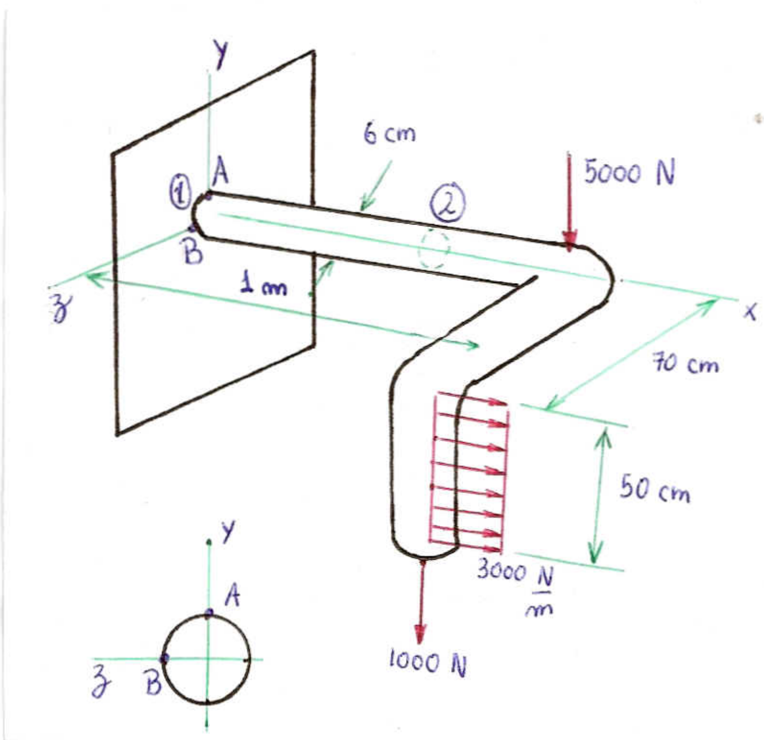
1) Calcular la deflexión en el punto C **usando el teorema de Castigliano**. Considere solo energía por flexión. La viga esta separada en dos zonas con momentos de inercia de valor I_z y $3I_z$, respectivamente, tal como lo indica la figura. (20 puntos)

Datos: $L = 1m$, $I_z = 10^{-7}m^4$, $w_0 = 1000N/m$, $E = 96GPa$



2) Considere la viga doblada y empotrada de la figura, la cual está sometida a dos fuerzas puntuales y una distribuida. (30 puntos)

a) ¿En que zona se producen la mayor concentración de esfuerzos? ¿En 1 o 2? Justifique.
b) Calcule las fuerzas, momentos y torque interno en la zona 1, e indique de manera clara y breve que tipo de esfuerzos generaran estas fuerzas para los puntos A y B de la figura.
c) Determine los esfuerzos generados por las fuerzas internas en A y B, grafíquelos en un cuadrado diferencial, indicando claramente que tipo de esfuerzos son.

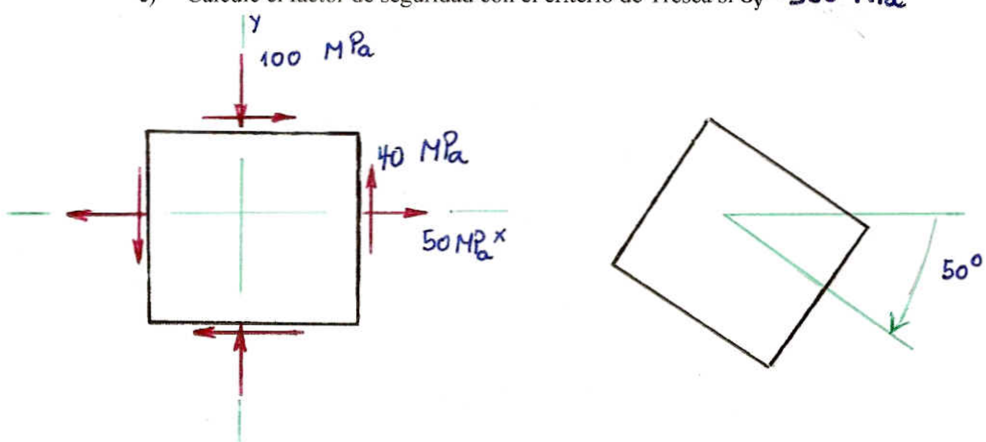


3) Considere el cuadrado diferencial de la figura. **<u>Usando el circulo de Mohr</u>**: (10 puntos)

a) Determine los esfuerzos normales máximo y mínimo, y de corte máximo

b) Determine el estado de esfuerzos para un cuadrado diferencial rotado en 50° tal como lo indica la figura.

c) Calcule el factor de seguridad con el criterio de Tresca si σ_y = 350 MPa



Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Flexión

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

2do momento de área: Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$

Sección circular $I_z = \pi \dfrac{D^4}{64}$

Corte viga sección arbitraria

$$\tau = \frac{V}{It}\int_y^c \xi dA$$

Energía de deformación

Flexión $U_f = \displaystyle\int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx$

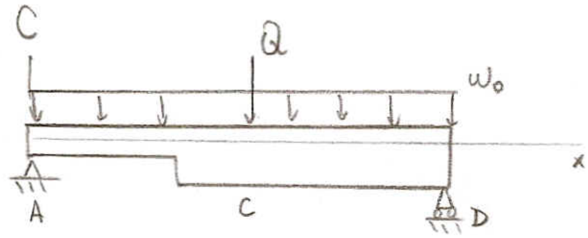
Corte (sección rectangular) $U_c = \dfrac{3}{5}\displaystyle\int_0^L \frac{1}{GA} V(x)^2 dx$ A: área de la sección

Esfuerzo de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

Pauta Control 3

1) • Para calcular la deflexión en C usando Castigliano, se agrega una fuerza puntual Q en C



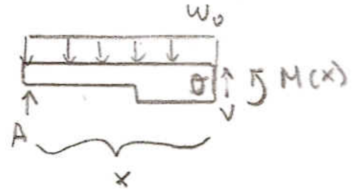
(4)

• Cálculo de reacciones en A y D

$$A = D = \frac{1}{2}\left(4Lw_0 + Q\right) = 2Lw_0 + \frac{Q}{2}$$ (1)

• Determinación de momento interno $M(x)$ (solo energía por flexión)

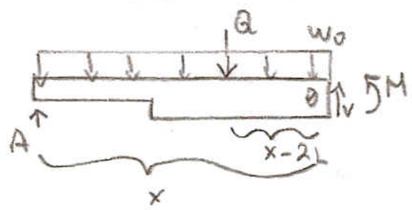
$0 < x < 2L$



$$\sum_{\theta} M_z = 0 \Rightarrow M - Ax + w_0\frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = Ax - w_0\frac{x^2}{2}$$ (1)

$2L < x < 4L$



$$\sum_{\theta} M_z = 0 \Rightarrow M - Ax + w_0\frac{x^2}{2} + Q(x-2L) = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = Ax - w_0\frac{x^2}{2} - Q(x-2L)$$ (1)

• Energía total por flexión

$$U_f = \int_0^{4L} \frac{1}{2EI} M(x)^2\, dx$$

ojo aquí se tiene $I = I(x) = \begin{cases} I_z & 0 \le x \le L \\ 3I_z & L < x \le 4L \end{cases}$ (3)

$$\delta_C = \int_0^{4L} \frac{1}{EI(x)} M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial Q}\, dx$$ (2)

se tiene

$$M(x) = \begin{cases} Ax - w_0 x^2/2 = \left(2Lw_0 + \frac{Q}{2}\right)x - w_0 x^2/2 & 0 \le x \le 2L \\ Ax - w_0 x^2/2 - Q(x-2L) \\ \quad = \left(2Lw_0 + \frac{Q}{2}\right)x - w_0\frac{x^2}{2} - Q(x-2L) & 2L < x \le 4L \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial Q} = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 2L \\ 2L - x/2 & 2L < x \leq 4L \end{cases}$ 1

de modo que si $L = 1m$ $I_z = 10^{-7} m^4$, $w_0 = 1000 \frac{N}{m}$, $E = 96 \times 10^9 Pa$

$$\delta_C = \int_0^L \frac{1}{EI_z}\left[\left(2Lw_0 + \frac{Q}{2}\right)x - w_0\frac{x^2}{2}\right]\frac{x}{2}\,dx + \int_L^{2L} \frac{1}{3EI_z}\left[\left(2Lw_0 + \frac{Q}{2}\right)x - w_0\frac{x^2}{2}\right]\frac{x}{2}dx$$

2

$$+ \int_{2L}^{4L} \frac{1}{3EI_z}\left[\left(2Lw_0 + \frac{Q}{2}\right)x - w_0\frac{x^2}{2} - Q(x-2L)\right]\left(2L - \frac{x}{2}\right) dx$$

3

$$\delta_c = \frac{Q}{19200} + \frac{31 w_0}{230400}$$

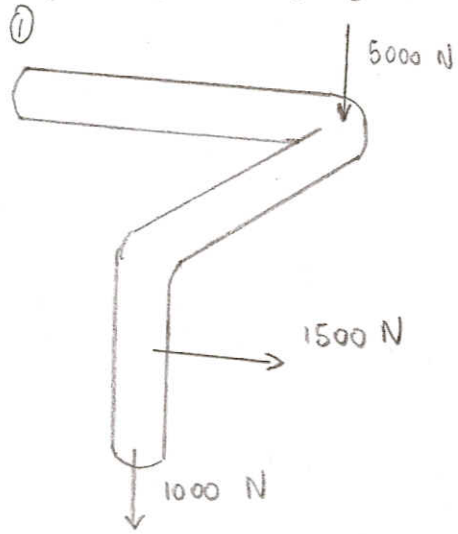
Se hace $Q = 0$ $\Rightarrow \delta_c = 0,13454\ m$ $\Leftrightarrow \delta_c = 13,454\ cm$

2

2) a) Para calcular los esfuerzos en la zona ① y ②, debemos mover las fuerzas de 5000 N, 1000 N y la resultante de 3000 $\frac{N}{m}$ a dichas zonas. (3)

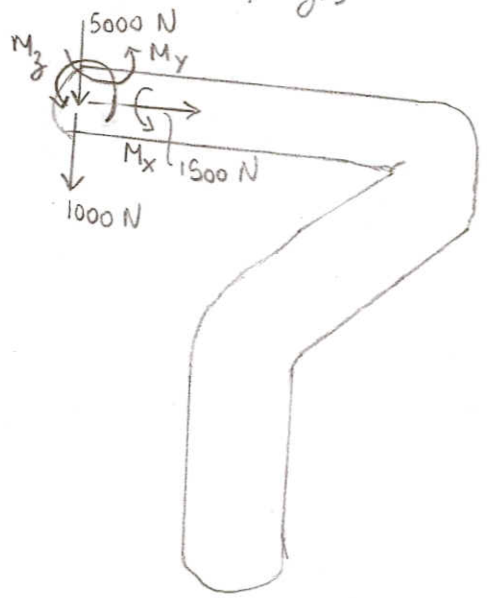
Al mover las fuerzas se generan en particular momentos de torsión y de flexión. En el caso de los momentos que generan flexión, estos son mayores en ① que en ②, puesto que la zona ① esta mas "alejada" de los puntos de aplicación de las fuerzas por lo que $\vec{M} = \vec{\rho} \times \vec{F}$ es mayor puesto que $\vec{\rho}$ es mayor. (5)

b) • Se reemplaza la fuerza distribuida de 3000 N/m por una puntual equivalente



(1)

• Se mueven las fuerzas a la zona ①



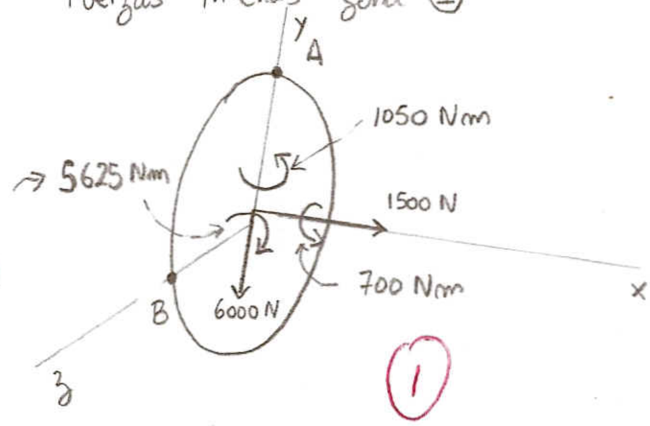
$M_z = -5000 \times 1 - 1000 \times 1 + 1500 \times 0{,}25$ Nm $= -5625$ Nm (1)

$M_y = 1500 \times 0{,}7$ Nm $= 1050$ Nm (1)

$M_x = 1000 \times 0{,}7$ Nm $= 700$ Nm

(1)

Fuerzas intenas Zona 1



Con signo positivo si se cambia el sentido de la flecha

1

Esfuerzos Punto A

1 • Esfuerzo de tracción debido a 1500 N

1 • Esfuerzo de tracción por flexión debido a 5625 Nm

1 • Esfuerzo de corte debido a torsión de 700 Nm

Esfuerzos Punto B

- Esfuerzo de tracción por fuerza axial 1500 N 1
- Esfuerzo de corte por fuerza de corte de 6000 N 1
- Esfuerzo de tracción por flexión debido a 1050 Nm 1
- Esfuerzo de corte debido a torsión de 700 Nm 1

c) • Cálculo esfuerzos punto A

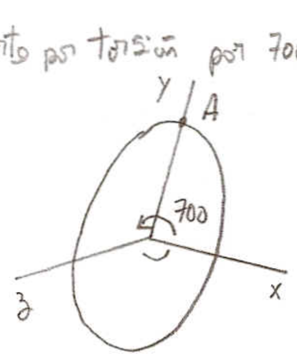
- Tracción por 1500 N $\sigma_x = \dfrac{1500\,N}{\text{Área sección}} = \dfrac{1500\,N}{\left(\frac{\pi \times 0{,}06^2\,m^2}{4}\right)} = 530{,}516\ kPa = 0{,}530516\ MPa$ 1

- Tracción por flexión por 5625 Nm $\sigma_x = \dfrac{5625}{I_z} \cdot \dfrac{d}{2}$ $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64} = 6{,}3617 \times 10^{-7}\,m^4$

el signo ya se ha incluido

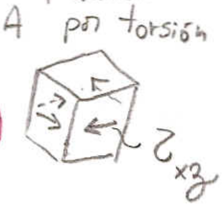
$\Rightarrow \sigma_x = \dfrac{5625\ Nm \times 0{,}03\ m}{6{,}3617 \times 10^{-7}\,m^4} = 265{,}258\ MPa$ 1

- Corte por torsión por 700 Nm



cubo diferencial en A por torsión

1



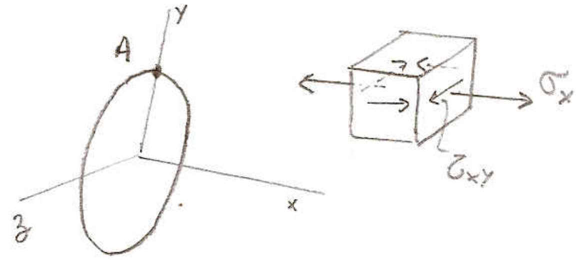
$\tau_{xz} = \dfrac{700\ Nm \times 0{,}03\ m}{J}$

$J = \dfrac{\pi}{32} d^4 = 1{,}27234 \times 10^{-6}\,m^4$

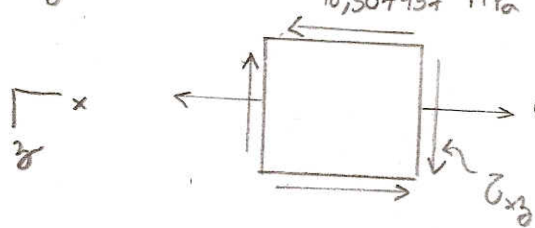
$\Rightarrow \tau_{xz} = \dfrac{700\ Nm \times 0{,}03\ m}{1{,}27234 \times 10^{-6}\,m^4} = 16{,}504957\ MPa$

1

Estado de esfuerzos en A



plano x-z

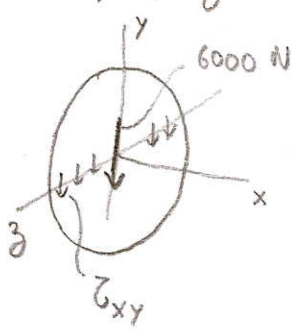


2

$\sigma_x = 265,258 + 0,530516 = 265,788516$ MPa

$\tau_{xz} = 16,504957$ MPa

- Cálculo de esfuerzos punto B
  - Tracción por 1500 N $\quad \sigma_x = 0,530516$ MPa $\quad$ 1
  - Corte por fuerza de corte de 6000 N



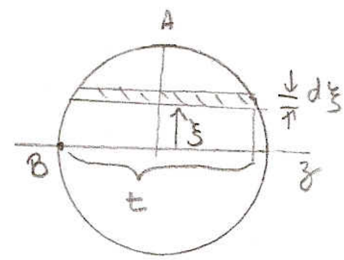
$$\tau_{xy} = \frac{V}{It}\int_0^{d/2} \xi \, dA$$

el signo se incluye despues o bien se le da sentido apropiado al vector

$V = 6000$ N

$I = 6,3617 \times 10^{-7}$ m^4

$t = 0,06$ m



$$dA = 2z\,d\xi \qquad \xi^2 + z^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{d^2/4 - \xi^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{d/2} \xi \, dA = 2\int_0^{d/2} \xi \sqrt{d^2/4 - \xi^2}\, d\xi = -\frac{2}{3}\left(d^2/4 - \xi^2\right)^{3/2}\Big|_0^{d/2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{4}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\frac{d^3}{2^3} = \frac{d^3}{12}$$

2

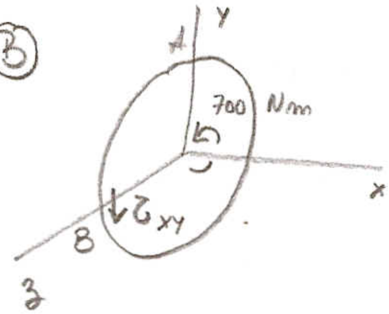
$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{6000 \text{ N}}{6,3617 \times 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{1}{0,06 \text{ m}} \times \frac{1}{12} \times 0,06^3 \text{ m}^3 = 2,82943 \text{ MPa}$$

- Tracción por flexión por 1050 Nm

$$\sigma_x = \frac{1050 \text{ Nm}}{6,3617 \times 10^{-7} \text{ m}^4} \times 0,03 \text{ m} = 49,515 \text{ MPa}$$

1

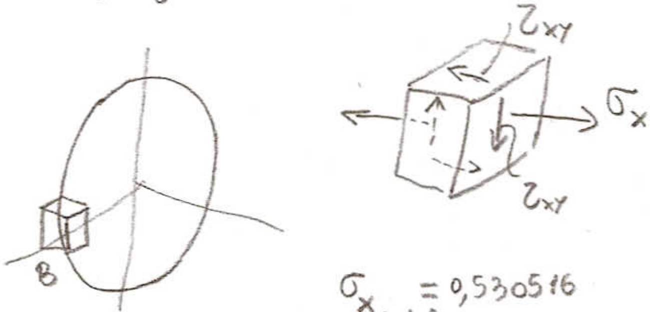
- Corte por torsión en B



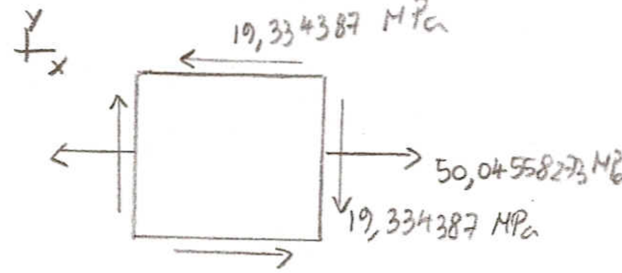
$\tau_{xy} = 16,504957$ MPa

1

Estado de esfuerzos en B



Plano x-Y

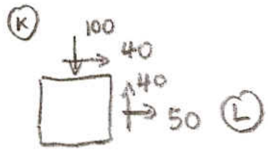


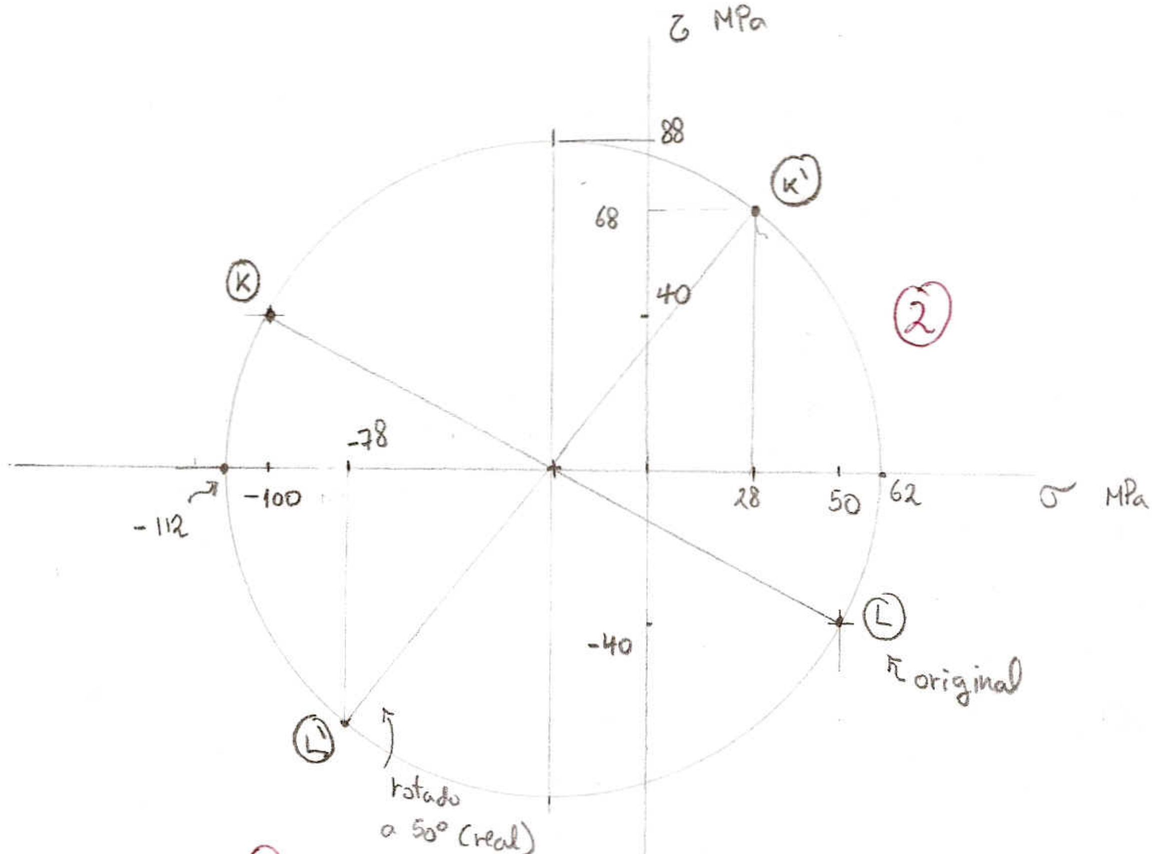
$\sigma_{x_{total}} = 0,530516 + 49,515 = 50,04558273$ MPa

2

$\tau_{xy_{total}} = 2,82943 + 16,504957 = 19,334387$ MPa

3)





1

50° → 100°

rotación original

plano σ-τ

ⓐ $\sigma_1 = 62$ MPa (1) $\sigma_2 = -112$ MPa (1) esfuerzos normales máximo y mínimo

$\tau = 88$ MPa (1) esfuerzo de corte máximo

ⓑ Rotado L' y K' en L' $\sigma = -78$ MPa (1)
$\tau = -68$ MPa

K' $\sigma = 28$ MPa (1)
$\tau = 68$ MPa

ⓒ $\tau_{adm} = \dfrac{\tau_0}{F.S.} \Rightarrow F.S. = \dfrac{\tau_0}{\tau_{adm}}$ $\tau_0 = \dfrac{\sigma_y}{2} = 175$ MPa y $\tau_{adm} = 88$ MPa

$\Rightarrow F.S = 1,9886$ (2)