

Esfuerzos Principales y Criterios de Falla

• Esfuerzos principales

$$\sigma_{n_{\max}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$n, j = x, y \text{ ó } z$

$$\tan(2\theta_n) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

θ_n : Ángulo para el cual los est. ppales. son máximos

• Criterios de Falla

↳ Factor de Seguridad: $F_{adm} = \frac{F_{\max}(\sigma)}{F.S.(\sigma)}$; F_{adm} : Fuerza máxima que debe aplicarse por seguridad
 $F_{\max}$: Fca máxima que debe aplicarse para que ocurra falla

↳ Criterio del est. normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.}$; σ_0 : Límite de Fluencia

↳ Criterio del est. de corte máximo (Tresca)

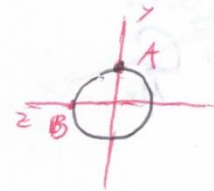
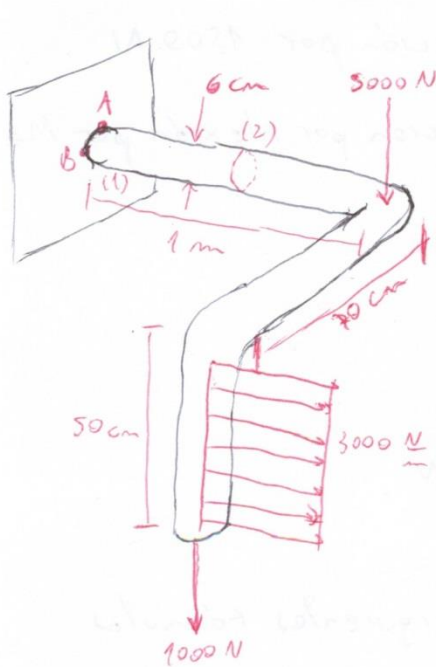
$$\tau_{adm} \leq \frac{\tau_0}{F.S.} = \frac{\sigma_0}{2F.S.}$$

↳ Criterio de Von Mises

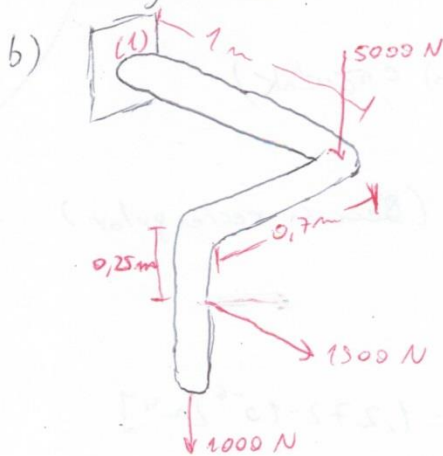
$$\sigma_{vm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.} ; \sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

σ_1, σ_2 : Est. ppales

P11



a) Para analizar el estado de esfuerzos en (1) y (2), es necesario mover las fuerzas a las zonas descritas. Al mover las f.tas. a (1), se generan momentos flexores y de torsión más fuertes que en (2), debido a que el "brazo" de las fuerzas es más grande. Por lo tanto, los esfuerzos serán más grandes en (1) que en (2)



* Trasladar la fuerza de 5000 N genera un momento en z de $(-5000 \cdot 1) = -5000 \text{ N}\cdot\text{m}$

* Trasladar la fuerza de 1000 N genera un momento en x de $(1000 \cdot 0,25) = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$ y un momento en z de $(-1000 \cdot 1) = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$

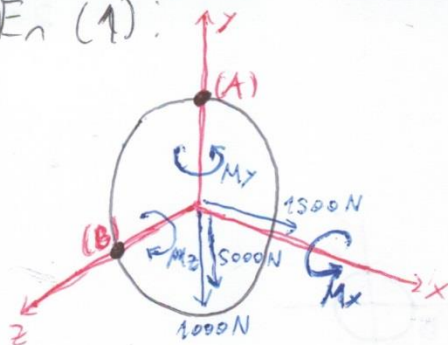
* Trasladar la fuerza de 1500 N genera un momento en z de $(1500 \cdot 0,25) = 375 \text{ N}\cdot\text{m}$ y un momento en y de $(1500 \cdot 0,7) = 1050 \text{ N}\cdot\text{m}$

* Sumando todos los momentos en cada eje, se tiene:

$$M_x = 250 \text{ N}\cdot\text{m} / M_y = 1050 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -5000 - 1000 + 375 = -5625 \text{ N}\cdot\text{m}$$

En (1):



• Esfuerzos en (A)

↳ Esfuerzo de corte por torsión por M_x

↳ Esfuerzo de tracción por 1500 N

↳ Esfuerzo de tracción por flexión por M_z

• Esfuerzos en (B)

↳ Esfuerzo de corte por torsión por M_x

↳ Esfuerzo de corte por fuerza de 6000 N

↳ Esfuerzo de tracción por fuerza de 1500 N

↳ Esfuerzo de tracción por flexión por M_y

c) Para calcular los esfuerzos se tienen las siguientes fórmulas

↳ Tracción por fuerza axial: $\sigma = \frac{F}{A}$

↳ Tracción por momento flector: $\sigma = -\frac{M}{I} y$

↳ Corte por fuerza de corte: $\tau = \frac{V}{I \cdot t} \int_0^y y \, dA$

↳ Corte por torsión: $\tau = \frac{T r}{J}$ (Sección circular)

$\tau = \frac{T}{k_1 a b^2}$ $b \leq a$ (Sección rectangular)

* Propiedades de áreas:

↳ $A = \frac{\pi d^2}{4} = 2,827 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$

↳ $I = \frac{\pi d^4}{64} = 6,362 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$

↳ $J = \frac{\pi d^4}{32} = 1,272 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$

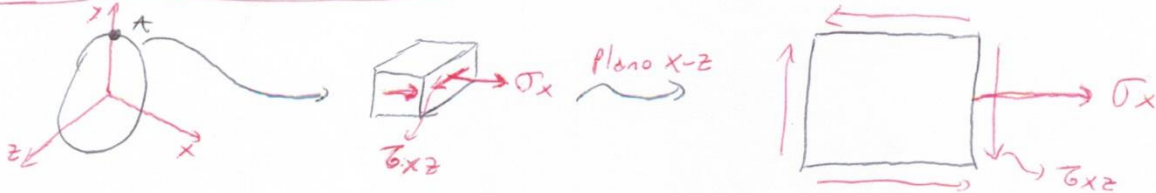
• Punto (A):

↳ Torsión de $700 \text{ Nm} \rightarrow \tau_{xz} = \frac{T \cdot (\frac{d}{2})}{J} = \frac{700 [\text{Nm}] \cdot 0,03 [\text{m}]}{1,272 \cdot 10^{-6} [\text{m}^4]} = 16,505 [\text{MPa}]$

↳ Tracción de $1500 \text{ N} \rightarrow \sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{1500 [\text{N}]}{2,827 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2]} = 0,531 [\text{MPa}]$

↳ Tracción por flexión $\rightarrow \sigma_x = -\frac{M}{I} y = \frac{5625 [\text{Nm}] \cdot (0,03 \text{ m})}{6,362 \cdot 10^{-7} [\text{m}^4]} = 265,247 [\text{MPa}]$
de -5625 Nm

* Estado de esfuerzos en (A)



$\sigma_x = 265,747 [\text{MPa}]$
 $\tau_{xz} = 16,505 [\text{MPa}]$

• Punto (B):

↳ Torsión de $700 \text{ Nm} \rightarrow \tau_{xy} = 16,505 [\text{MPa}]$

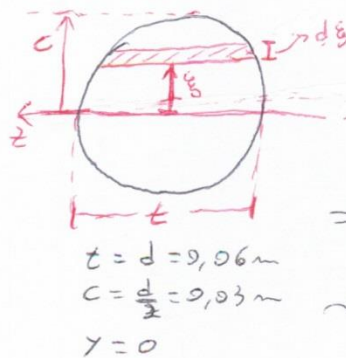
↳ Tracción de $1500 \text{ N} \rightarrow \sigma_x = 0,531 [\text{MPa}]$

↳ Tracción por flexión $\rightarrow \sigma_x = \frac{1050 \text{ Nm} \cdot 0,03 \text{ m}}{6,362 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 49,513 [\text{MPa}]$
de 1050 Nm

↳ Corte por 6000 N

$$\tau_{xy} = \frac{V}{It} \int \xi dA$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int \xi dA &= \int_0^{d/2} 2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2} \xi d\xi \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{d^2}{4} \right)^{3/2} = \frac{d^3}{12} \end{aligned}$$



$dA = 2z d\xi$

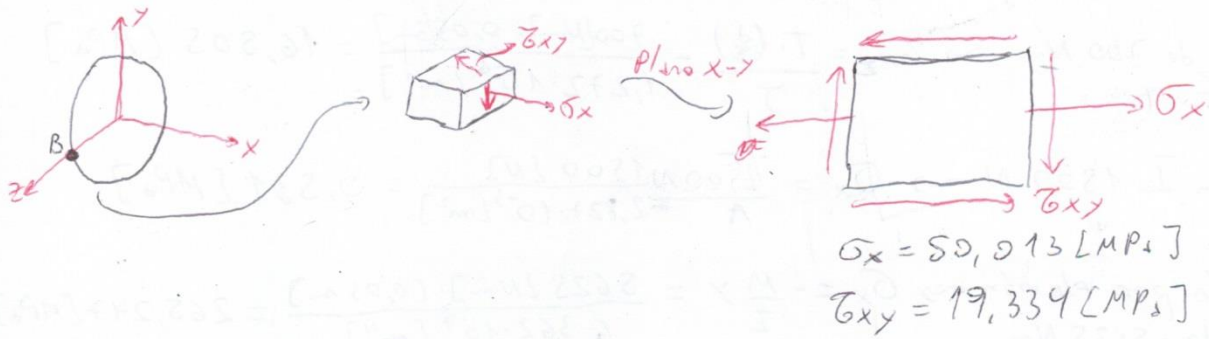
$z^2 + \xi^2 = \frac{d^2}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}$

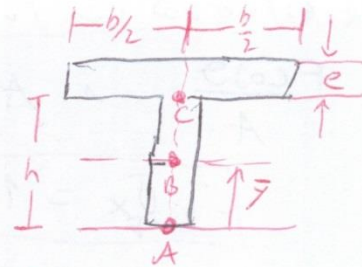
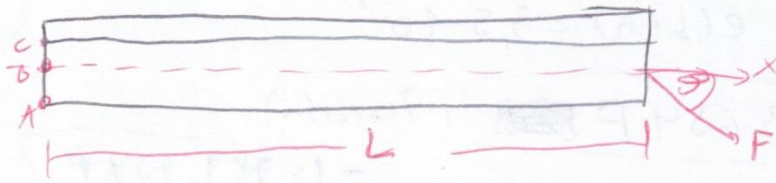
$\rightarrow dA = 2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2} d\xi$

$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{-6000 \text{ N}}{6,362 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \cdot 0,06 \text{ m}} \cdot \frac{(0,06)^3 \text{ m}^3}{12} \rightarrow \tau_{xy} = 2,829 [\text{MPa}]$

* Estado de esfuerzos en (B)



P21:



$L = 2\text{ m}; h = 20\text{ cm}; b = 15\text{ cm}; e = 1\text{ cm}; \theta = 50^\circ \rightarrow \parallel e \leftarrow$

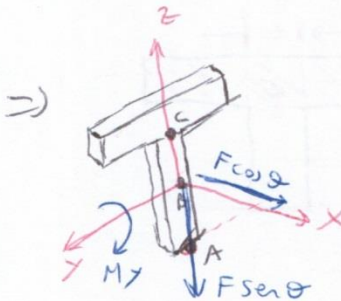
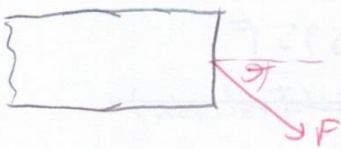
• Calculando $\bar{y}$ e $\bar{I}_2$

$\rightarrow I_1 = \frac{b \cdot e^3}{12} = \frac{0,15 \cdot 0,01^3}{12} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$
 $\rightarrow I_2 = \frac{e h^3}{12} = \frac{0,01 \cdot 0,2^3}{12} = 6,667 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$

$\rightarrow \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{(h + \frac{e}{2}) \cdot (e \cdot b) + \frac{h}{2} \cdot (e \cdot h)}{e \cdot b + e \cdot h} = 0,145 \text{ [m]}$

$\rightarrow \bar{I}_2 = \underbrace{[I_1 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2 (e \cdot b)]}_{\bar{I}_1} + \underbrace{[I_2 + (\bar{y} - \bar{y}_2)^2 (e \cdot h)]}_{\bar{I}_2} = 1,614 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^4\text{]}$

• Veamos el estado de esfuerzos en la zona empotrada:



- (A):
- Esf. de tracción por fzd. axial de $F \cos \theta$
 - Esf. de compresión por momento flector $M_y = F \sin \theta \cdot L$
 - No hay esf. de corte por fzd. de corte $F \sin \theta$
- (B):
- Esf. de tracción por fzd. axial $F \cos \theta$
 - Esf. de corte por fzd. de corte $F \sin \theta$
 - No hay esf. normal por momento flector M_y
- (C):
- Esf. de tracción por fzd. axial $F \cos \theta$
 - Esf. de ~~compresión~~ tracción por momento flector M_y
 - Esf. de corte por fzd. de corte $F \sin \theta$

• Cálculo de esfuerzos (en función de F)

$$(A): \sigma_x = \frac{F \cos \theta}{A} \quad \text{con } A = e(b+ht) = 3,5 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2]$$

$$\text{(Fuerza axial)} \quad \boxed{\sigma_x = 183,654 F}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot y}{I_z} = \frac{F \sin \theta \cdot L \cdot \bar{y}}{I_z} \rightarrow \boxed{\sigma_x = -13775,507 F}$$

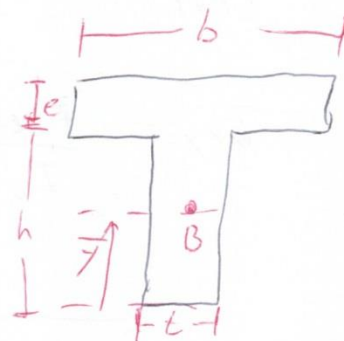
$$\sigma_{x \text{ Total}} = -13589,853 F$$

$$(B) \sigma_x = \frac{F \cos \theta}{A} = 183,654 F$$

$$\text{(Fuerza axial)}$$

$$\bar{z}_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t} \int y dA$$

$$\begin{aligned} V &= -F \sin \theta \\ t &= e \\ y &= 0 \\ c &= h + e - \bar{y} \end{aligned}$$



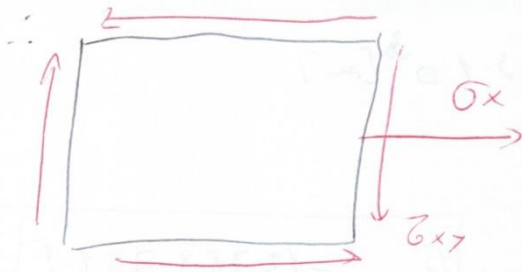
$$dA = \begin{cases} e dy & -\bar{y} < y < h - \bar{y} \\ b dy & h - \bar{y} < y < h + e - \bar{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int y dA = \int_0^{h-\bar{y}} e y dy + \int_{h-\bar{y}}^{h+e-\bar{y}} b y dy =$$

$$= \frac{e}{2} (h - \bar{y})^2 + \frac{b}{2} ((h + e - \bar{y})^2 - (h - \bar{y})^2)$$

$$\therefore \bar{z}_{xy} = \frac{-F \sin \theta}{2 I_z e} (e(h - \bar{y})^2 + b((h + e - \bar{y})^2 - (h - \bar{y})^2))$$

$$\boxed{\bar{z}_{xy} = -499,2896 F}$$



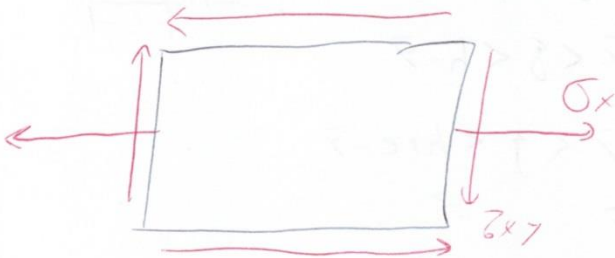
$$\sigma_x = 183,654 F$$

$$\tau_{xy} = 499,2896 F$$

(C) $\sigma_x = 183,654 F$ (for $x=0$)

$$\sigma_x = \frac{F \cdot \sin \theta \cdot L}{I_z} \cdot (h - \bar{y}) = 5224,43 F$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F \sin \theta}{I_z \cdot e} \int_{h-\bar{y}}^{h-\bar{y}} \xi \cdot b \, d\xi \Rightarrow \tau_{xy} = -427,4536 F$$



$$\sigma_x = 5408,085 F$$

$$\tau_{xy} = 427,4536 F$$

• Calculando as f. principais:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_m = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(A) $\sigma_x = -13589,853 F \Rightarrow \sigma_n = -13589,853 F$
 $\sigma_z = 0$

(B) $\sigma_x = 183,654 F$
 $\tau_{xy} = -499,2896 F$ } $\sigma_1 = 599,49 F$
 $\sigma_2 = -415,836 F$

$$(c) \left. \begin{aligned} \sigma_x &= 5408,088 \text{ F} \\ \tau_{xy} &= 427,4836 \text{ F} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_1 &= 5441,665 \text{ F} \\ \sigma_2 &= -33,5773 \text{ F} \end{aligned}$$

• Aplicando Von Mises $\left(\sigma_{Adm} = \frac{\sigma_2}{F.S.} \right) \wedge \left(\sigma_{Adm} = \sigma_{vm} \right)$

$$(A): \sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \cdot \sigma_2} = 143589,853 \text{ F} = \frac{340 \cdot 10^6}{2,5}$$

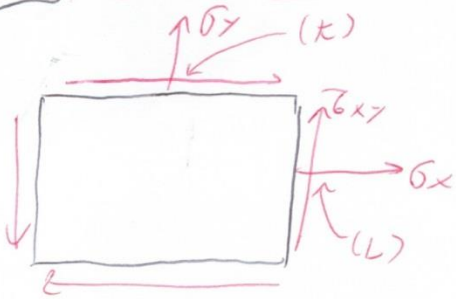
$$\therefore F_A = 10007,467 \text{ N}$$

$$(B): \sigma_{vm} = 884,07995 \text{ F} = \frac{340 \cdot 10^6}{F.S.} \Rightarrow F_B = 153832,24 \text{ N}$$

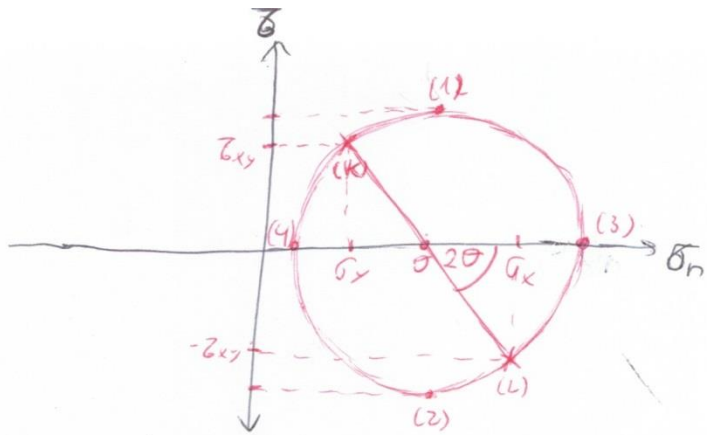
$$(C): \sigma_{vm} = 5488,53 \text{ F} = \frac{340 \cdot 10^6}{F.S.} \Rightarrow F_C = 24915,128 \text{ N}$$

∴ La carga máxima aplicable es $F_A = 10007,467 \text{ N}$

P3) Círculo de Mohr



* Si τ_{xy} gira cuadrado d.f. en el sentido de las manecillas del reloj $\Rightarrow \tau_{xy} > 0$



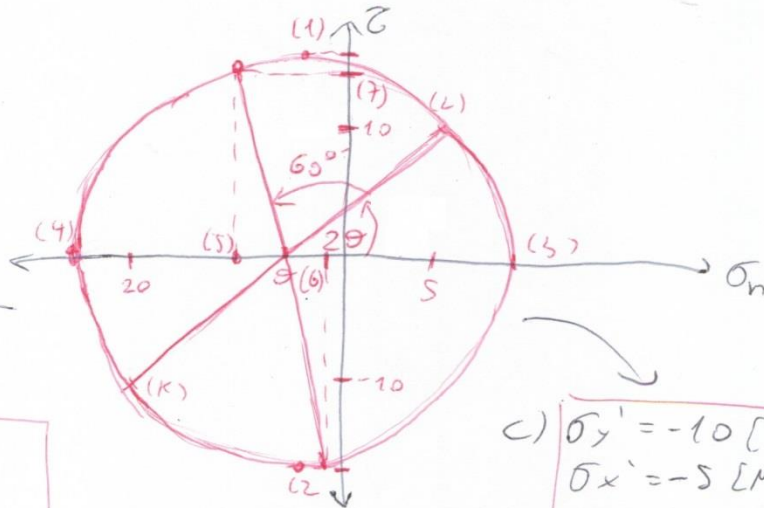
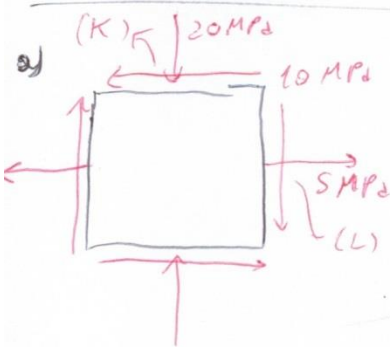
(1), (2): Esfuerzos de corte máximos y mínimos
(3), (4): Esfuerzos normales máximos y mínimos
 θ : Ángulo que debe rotar el cuadrado diferencial para lograr los esf. normales

Criterios de Falla

↳ Criterio del esfuerzo normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_o}{F.S.}$ $\wedge \sigma_o = \sigma_1$

↳ Criterio del esfuerzo de corte máximo (Tresca): $\tau_{adm} \leq \frac{\tau_o}{F.S.}$ $\wedge \tau_o = \frac{\sigma_o}{2}$

↳ Criterio de Von Mises: $\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_o}{F.S.}$ $\wedge \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$
 $\sigma_o = \sigma_y$



$$\sigma_1 = 8,1 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_2 = -24 \text{ [MPa]}$$

$$2\theta = 38^\circ \Rightarrow \theta = 19^\circ$$

$$b) \tau = 16,1 \text{ [MPa]}$$

$$c) \sigma_y' = -10 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_x' = -5 \text{ [MPa]}$$

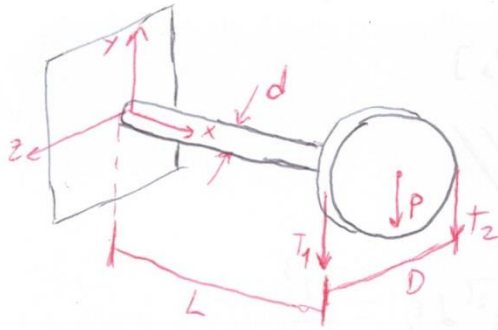
$$\tau_{xy} = 15,7 \text{ [MPa]}$$

$$d) \sigma_{VM} = \sqrt{8,1^2 + (-24)^2 + 8,1 \cdot (-24)}$$

$$\sigma_{VM} = 28,917 \text{ [MPa]} > \frac{\sigma_o}{F.S.} = 27,5 \text{ [MPa]}$$

Se produce falla
 $\sigma_{VM} > \frac{\sigma_o}{F.S.}$

P3



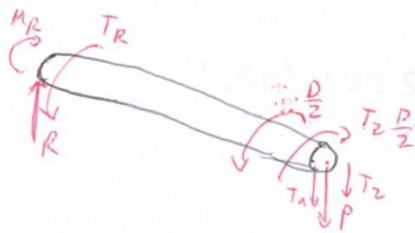
* Propiedades de área

$$\hookrightarrow A = \frac{\pi d^2}{4} = 2,827 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\hookrightarrow I = \frac{\pi d^4}{64} = 6,362 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\hookrightarrow J = \frac{\pi d^4}{32} = 1,272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

a) DCL

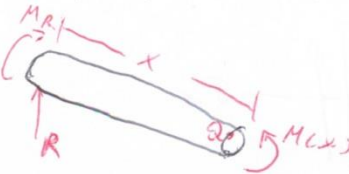


$$R = T_1 + T_2 + P = 4250 \text{ N}$$

$$T_R = (T_1 - T_2) \frac{D}{2} = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_R = -(T_1 + T_2 + P)L = -1275 \text{ N}\cdot\text{m}$$

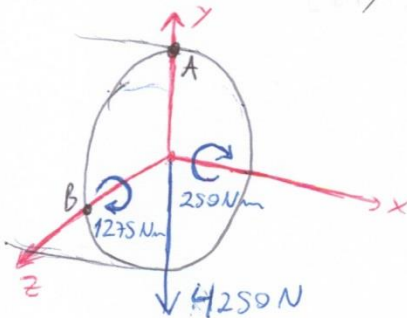
$\rightarrow$ Solo $M(x)$ cambia con la distancia x



$$\left\{ \begin{array}{l} M(x) = M_R + x \cdot R \\ \quad \quad \quad = -R \cdot L + xR \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{M(x) = R(x - L)}$$

$\rightarrow$ M es máximo cuando $x = 0$, es decir, en el empotramiento //

b) Moviendo fuerzas y torques al empotramiento



* Esfuerzos en (A):

- Esfuerzo de corte τ_{xz} por torsión de 250 N·m

- Esfuerzo de tracción σ_x por flexión por Momento de 1275 N·m

* Esfuerzos en (B):

- Esfuerzo de corte τ_{xy} por fuerza de corte de 4250 N

- Esfuerzo de corte τ_{xy} por torsión de 250 N·m

c) Punto (A)

$\rightarrow$ Torsión de 250 N·m: $\tau_{xz} = \frac{T(\frac{d}{2})}{J} = \frac{250 [\text{N}\cdot\text{m}] \cdot 0,03 [\text{m}]}{1,272 \cdot 10^{-6} [\text{m}^4]} = 5,896 [\text{MPa}]$

$\rightarrow$ Tracción por flexión: $\sigma_x = -\frac{M}{I} y = \frac{1275 [\text{N}\cdot\text{m}] \cdot 0,03 [\text{m}]}{6,362 \cdot 10^{-7} [\text{m}^4]} = 60,123 [\text{MPa}]$

• Punto (B)

→ Torsión de 250 Nm : $\tau_{xy} = 5,896 \text{ [MPa]}$

→ Corte por fuerza : $\tau_{xy} = \frac{V}{It} \int \xi dA$ //
de 4250 N

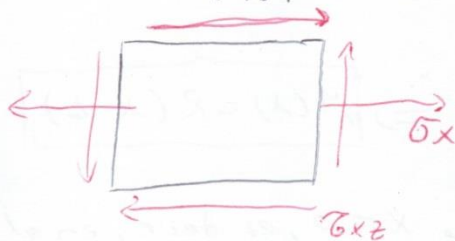
* Desde ej. (1) : $\int \xi dA = 2 \int_0^{d/2} \xi \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2} d\xi = \frac{d^3}{12}$

• $\gamma = 0$, $c = \frac{d}{2}$, $t = d$

$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{-4250 \text{ N}}{6,362 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \cdot 0,06 \text{ m}} \cdot \frac{(0,06)^3 \text{ m}^3}{12} = -2,004 \text{ [MPa]}$

• Estado de esfuerzo :

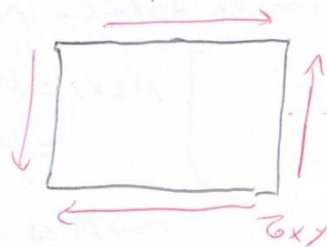
(A) plano x-z



$\sigma_x = 60,123 \text{ [MPa]}$

$\tau_{xz} = 5,896 \text{ [MPa]}$

(B) plano x-y

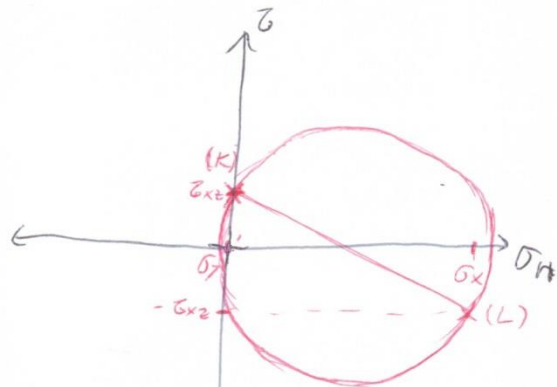


$\sigma_x = 0$

$\tau_{xy} = 3,892 \text{ [MPa]}$



$$d) (A): (K) \Rightarrow \sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 5,896 \quad || \quad (L) \Rightarrow \sigma_x = 60,123 \quad \tau_{xz} = -5,896$$

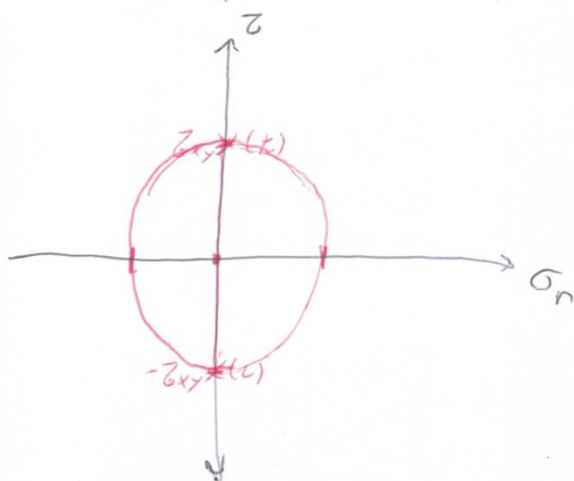


$$\sigma_{max} = 62 \text{ MPa } (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -1 \text{ MPa } (\sigma_2)$$

(A)

$$(B): (K) \Rightarrow \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 3,592$$

$$(L) \Rightarrow \sigma_x = 0 \quad \tau_{xy} = -3,592$$



$$\sigma_{max} = 3,592 \text{ [MPa]} (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -3,592 \text{ [MPa]} (\sigma_2)$$

(B)

$$e) (A) \rightarrow \sigma_{vm} = \sqrt{62^2 + (-1)^2 - 62 \cdot (-1)} = 62,5 \text{ [MPa]}$$

$$\frac{\sigma_0}{F.S} = 136 \text{ [MPa]} \Rightarrow \text{Dado que } \sigma_{vm} < \frac{\sigma_0}{F.S}, \text{ el material no Falla}$$

$$(B) \rightarrow \sigma_{vm} = \sqrt{(3,592)^2 + (-3,592)^2 - 3,592 \cdot (-3,592)} = 6,23 \text{ [MPa]}$$

$$\Rightarrow \text{Dado que } \sigma_{vm} < \frac{\sigma_0}{F.S}, \text{ el material no Falla} //$$