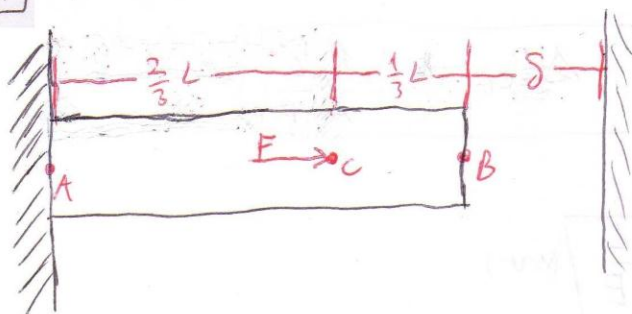
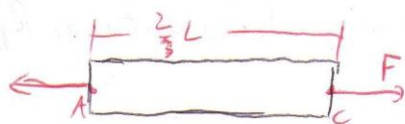


P1)

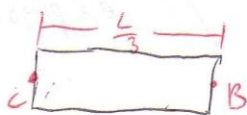


A_s, E

a) Analicemos que parte de la barra se estira realmente: Corte justo antes y justo después de C:



(Se deforma)

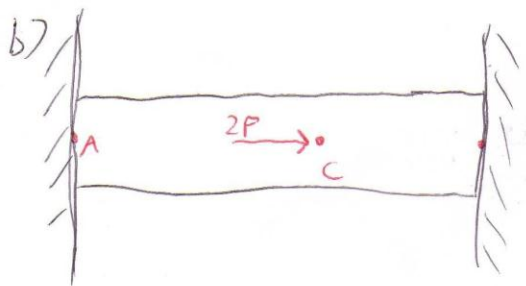


(No se deforma)

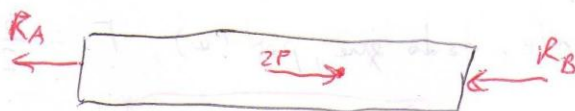
* Para la deformación sólo consideramos el largo inicial del tramo que se deforma (AC)

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A_s} \\ \sigma &= E \cdot \epsilon \end{aligned} \right\} \frac{F}{A_s} = E \cdot \frac{\Delta L}{\frac{2}{3}L} \quad // \text{ Para que toque la pared, } \Delta L = \delta$$

$$\therefore F = \frac{3EA_s \delta}{2L}$$



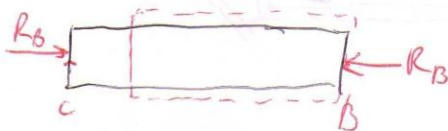
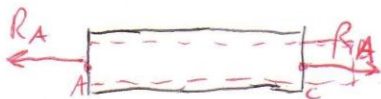
DCL completo



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2F - R_A = R_B$$

$$R_A = 2F - R_B \quad (i)$$

* Si hacemos un corte antes y después de C:



Una vez en contacto con la pared, lo que se alarga AC es lo que se acorta CB. Luego, el alargamiento total de AC es:

$$\Delta L_{AC} = \delta + \Delta L_{CB} \quad (ii)$$

- Utilizando Ley de Hooke para CB

$$\sigma = \frac{R_B}{A_s} \Rightarrow \frac{R_B}{A_s} = E \cdot \frac{\Delta L_{CB}}{\frac{L}{3}} \quad \therefore \Delta L_{CB} = \frac{1}{3} \frac{R_B L}{A_s E} \quad (iii)$$

- Reemplazando esta expresión en (ii)

$$\Delta L_{AC} = \delta + \frac{1}{3} \frac{R_B L}{A_s E} \quad (iv)$$

- Utilizando Ley de Hooke para AC:

$$\sigma = \frac{R_A}{A_s} \Rightarrow \frac{R_A}{A_s} = E \cdot \frac{\Delta L_{AC}}{\frac{2L}{3}} \quad // \text{ Reemplazando (i) y (iv) en la expresión anterior, podemos obtener } R_B$$

$$\Rightarrow \frac{2F - R_B}{A_s} = \frac{3E}{2L} \left(\delta + \frac{1}{3} \frac{R_B L}{A_s E} \right) \Rightarrow 2F - R_B = \frac{3EA_s \delta}{2L} + \frac{R_B}{2}$$

$$\therefore R_B = \frac{4F}{3} - \frac{3EA_s \delta}{L}$$

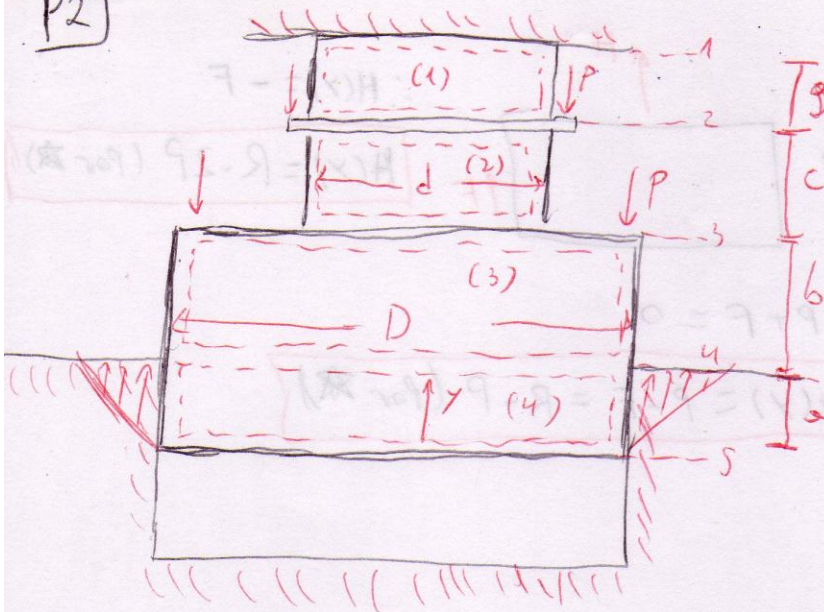
- Reemplazando en (i)

$$R_A = \frac{2F}{3} + \frac{3EA_s \delta}{L}$$

- Finalmente, dado que, por (a), $F = \frac{3}{2} \frac{3EA_s \delta}{L}$:

$$\begin{aligned} R_A &= 2 \frac{3EA_s \delta}{L} \\ R_B &= \frac{3EA_s \delta}{L} \end{aligned}$$

P2)



$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$a = 700 \text{ cm}$$

$$b = 600 \text{ cm}$$

$$c = 400 \text{ cm}$$

$$g = 200 \text{ cm}$$

$$P = 10000 \text{ kgf}$$

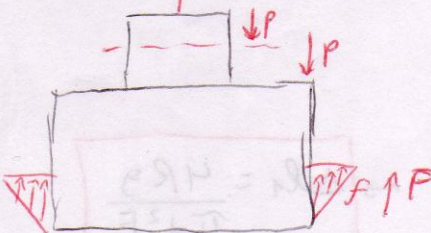
$$f = k \gamma \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

* **NO** es dato $\rightarrow$ Hay que calcularlo de alguna ecuación

* Cada sección de la columna está sometida a diferentes esfuerzos, por lo que sus alargamientos son diferentes, pero el largo de la columna permanece igual

* Haremos corte interno en la columna para determinar $H(\gamma)$ en cada tramo desde abajo

• DCL



* Calculamos la f resultante de f (Integramos en el área del cilindro)

$$F = \int_A f \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a k \cdot \gamma \cdot \left(\frac{D}{2} d\theta d\gamma \right)$$

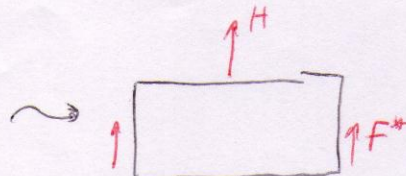
Diferencial de área del cilindro $\rightarrow r d\theta dz$

$$\therefore F = k \pi a^2 \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow F + R - 2P = 0 \rightarrow \boxed{F = 2P - R} \quad (*)$$

• Cálculo de $H(\gamma)$

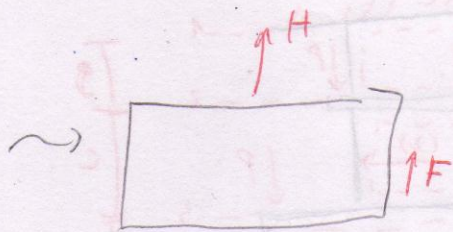
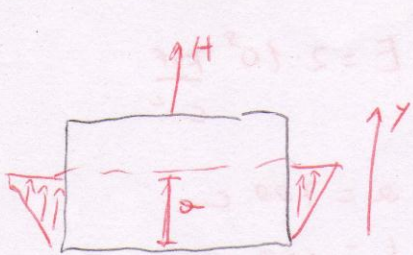
$$1) 0 < \gamma < a$$



$$F^* = k \pi \gamma^2 \frac{D}{2}$$

$$\therefore H(\gamma) = -k \pi \gamma^2 \frac{D}{2}$$

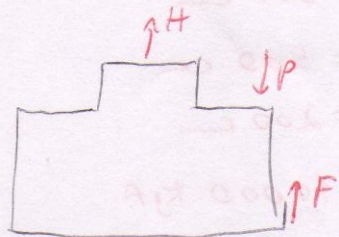
2-) $a < y < a+b$



$$\therefore H(y) = -F$$

$$H(y) = R - 2P \text{ (Por } \star \text{)}$$

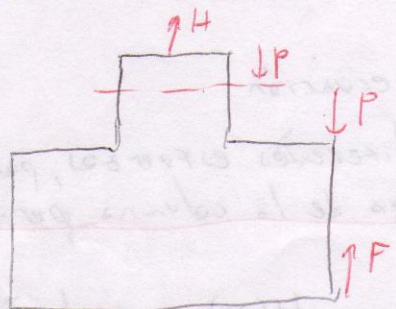
3-)



$$H - P + F = 0$$

$$\therefore H(y) = P - F = R - P \text{ (Por } \star \text{)}$$

4-) $a+b+c < y < a+b+c+g$

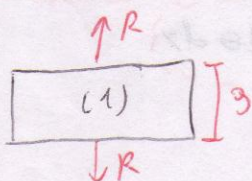


$$H + F - 2P = 0$$

$$\therefore H(y) = 2P - F = R \text{ (Por } \star \text{)}$$

* Determinemos ahora los alargamientos en cada sección (Ley de Hooke) (desplazamientos)

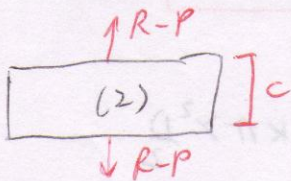
• Sección 1; Fz que actúa: $H(y) \equiv R$



$$\sigma = \epsilon E \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot E$$

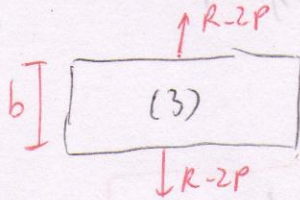
$$\Rightarrow \frac{R}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{\Delta l_1}{b} E \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{4Rb}{\pi d^2 E}$$

• Sección 2; Fz que actúa: $H(y) = R - P$



$$\Rightarrow \frac{(R-P)}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{\Delta l_2}{c} E \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{4c(R-P)}{\pi d^2 E}$$

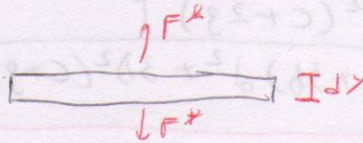
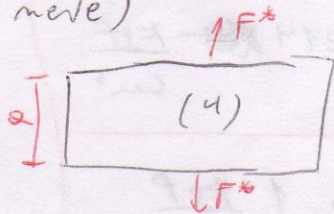
• Sección 3; Fzda. que actúa: $H(y) = R - 2P$



$$\frac{(R-2P)}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{\Delta l_3}{b} \cdot E \leadsto \boxed{\Delta l_3 = \frac{4b(R-2P)}{\pi D^2 E}}$$

• Sección 4; Fzda que actúa: $H(y) = F^* = K \pi y^2 \frac{D}{2}$

↳ Dado que la Fzda es diferente en los distintos puntos de la sección, tenemos que sumar todos los alargamientos/acortamientos de éste (Diferencialmente)



$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta(dy)}{dy} \leadsto \frac{F^*}{A} = \frac{\Delta(dy)}{dy} \cdot E$$

$$\Rightarrow \frac{K \pi y^2 \frac{D}{2}}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{\Delta(dy)}{dy} \cdot E \leadsto \Delta(dy) = \frac{2K}{DE} y^2 dy$$

* Integrando:

$$\int \Delta(dy) = \Delta l_4 = \int_0^a \frac{2K}{DE} y^2 dy \Rightarrow \boxed{\Delta l_4 = \frac{2K a^3}{3 DE}}$$

• Dado que la columna conserva su largo inicial, los alargamientos/acortamientos de las distintas secciones se cancelan entre sí, o sea, la suma de los Δl debe ser cero, luego:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0$$

$$\boxed{\frac{24Rg}{\pi D^2 E} + \frac{4C(R-P)}{\pi D^2 E} + \frac{4b(R-2P)}{\pi D^2 E} + \frac{2K a^3}{3 DE} = 0} \quad (\star \star)$$

• Las incógnitas del problema son R y $F(\kappa)$, por lo que pueden despejarse usando $(\star)$ y $(\star\star)$

$$F = 2P - R \leadsto \boxed{\kappa \pi a^2 \frac{D}{2} = 2P - R}$$

$$\boxed{\frac{2R_3}{\pi d^2} + \frac{2C(R-P)}{\pi d^2} + \frac{2b(R-2P)}{\pi D^2} + \frac{1}{3} \frac{\kappa e^3}{D} = 0}$$

• Despejando κ y R :

$$\kappa = \frac{6D^2(C+2g)P}{a^2\pi(a+3b)d^2 + 3D^2(C+g)} = 0,00214 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^3}$$

$$R = \frac{(2(a+3b)d^2 + 3CD^2)P}{((a+3b)d^2 + 3D^2(C+g))} = 10103,1 \text{ kgf}$$

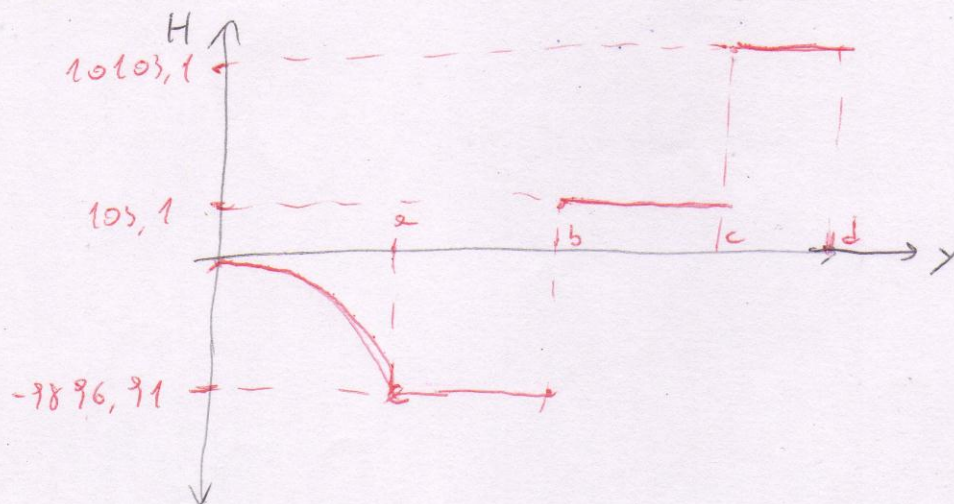
(Hint: Divide $\star$ ecs. entre s. y asegúrese de simplificar κ para obtener R)

• Calculando $H(y)$ en cada tramo:

$$H(y) = \begin{cases} -\kappa \pi y^2 \frac{D}{2} = -0,02 y^2 [\text{kgf}] & 0 < y < a+b \\ -\kappa \pi a^2 \frac{D}{2} = -9896,908 [\text{kgf}] & a < y < a+b \\ R - P = 103,1 [\text{kgf}] & a+b < y < a+b+c \\ \cancel{R} = R = 10103,1 [\text{kgf}] & a+b+c < y < a+b+c+g \end{cases}$$

$$(\star\star) \quad 0 = \frac{6D^2(C+2g)P}{a^2\pi(a+3b)d^2 + 3D^2(C+g)} + \frac{2C(R-P)}{\pi d^2} + \frac{2b(R-2P)}{\pi D^2} + \frac{1}{3} \frac{\kappa e^3}{D}$$

• Gráfico (a)



(b) $y = 350 \text{ cm} \leadsto 0 < 350 < a = 700 \Rightarrow H(y) = -K\pi y^2 \frac{\Delta}{2}$

$\leadsto H(350) = -2470,71 \text{ kgf}$

$\leadsto \sigma(350) = \frac{F}{A} = \frac{-2470,71}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} \leadsto \sigma(350) = -87,383 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

(-) $\rightarrow$ Compresión

(c) Depende de la magnitud y el área!!

* Máx est. en parte baja ($D = 6 \text{ cm}$):

$\sigma = -\frac{9896,91}{\pi \cdot \frac{(6)^2}{4}} \Rightarrow \sigma(a) = -359,032 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

$\uparrow$ compresión

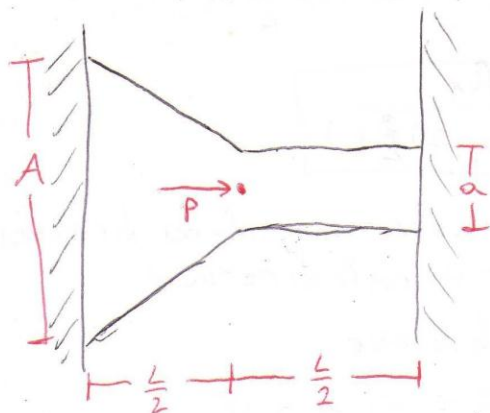
* Máx. est. en parte d/ta ($d = 3 \text{ cm}$):

$\sigma(a+b+c+g) = \frac{10103,1}{\pi \cdot \frac{(3)^2}{4}} \Rightarrow \sigma(a+b+c+g) = 1429,296 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

$\uparrow$ Tracción

$\therefore$ El máximo est. axial se produce en la base superior y es de tracción //

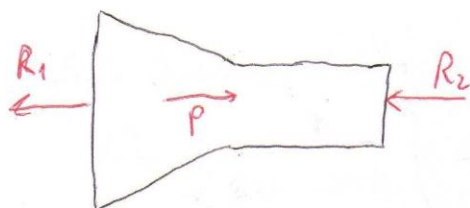
P3)



Espejor e
Módulo de Elasticidad E

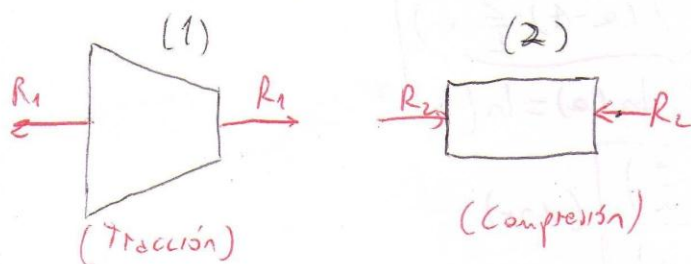
Principal problema: Área en el primer tramo varía con la distancia
 $\Rightarrow$ Esfuerzo varía con la distancia.

• DCL completo



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P = R_1 + R_2} \quad (i)$$

• Cortes antes y después de P:



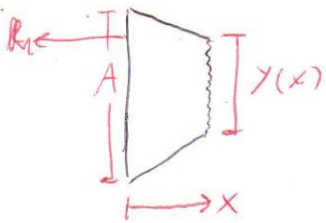
Como el largo total no cambia,
lo que se alarga (1), se acorta (2)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L_1 = \Delta L_2} \quad (ii)$$

• Aplicación de Ley de Hooke:

$$(2): \sigma = \frac{R_2}{a \cdot e} \Rightarrow \frac{R_2}{a \cdot e} = E \cdot \frac{\Delta L_2}{L/2} \Rightarrow \boxed{\Delta L_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2 L}{a \cdot e E}} \quad (iii)$$

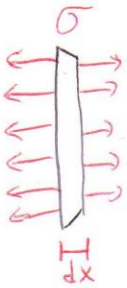
(17);



$$\sigma = \frac{R_1}{e \cdot y(x)} \quad \text{y} \quad y(x) = A + (a - A) \cdot \frac{2}{L} x$$

$$\sigma(x) = \frac{R_1}{e(A + (a - A) \frac{2}{L} x)}$$

* Cada segmento diferencial del tramo (1) se deforma en magnitudes diferentes ya que el esfuerzo cambia con x . Al hacer un corte diferencial:



$$\epsilon = \frac{\Delta L(dx)}{dx}$$

Lo que se alarga cada trozo diferencial
Largo inicial del trozo diferencial

Ley de Hooke

$$\sigma = E \cdot \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{\Delta L(dx)}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\Delta L(dx) = \frac{\sigma(x)}{E} dx$$

~~Integrando~~

* Integrando entre 0 y $\frac{L}{2}$, se obtiene el alargamiento total:

$$\int \Delta L(dx) = \Delta L_1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{R_1}{eE} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{A + (a - A) \frac{2}{L} x} dx$$

$$\Rightarrow \Delta L_1 = \frac{R_1}{eE} \cdot \frac{L}{2(a - A)} \cdot \ln \left(A + (a - A) \cdot \frac{2}{L} x \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

$\ln(A) - \ln(a) = \ln\left(\frac{A}{a}\right)$

$$\therefore \Delta L_1 = \frac{R_1 L \cdot \ln\left(\frac{A}{a}\right)}{2eE(a - A)} \quad (iv)$$

* Debido a (iii) $\Rightarrow$ (iv) = (v):

$$\frac{1}{2} \frac{R_2 K}{aE} = \frac{R_1 K \cdot \ln\left(\frac{A}{a}\right)}{2eE(a - A)} \Rightarrow R_2 = \frac{a}{a - A} \ln\left(\frac{A}{a}\right) R_1 \quad (v)$$

* Reemplazando (v) en (i), se tiene finalmente que:

$$R_1 \left(1 + \frac{2}{a-1} \ln\left(\frac{A}{a}\right) \right) = P$$

$$\therefore R_1 = \frac{P}{1 + \frac{2}{a-1} \ln\left(\frac{A}{a}\right)}$$
$$R_2 = \frac{P}{1 + \frac{1}{\frac{2}{a-1} \ln\left(\frac{A}{a}\right)}}$$