

Examen, Resistencia de Materiales ME3202 ME46A

2do semestre 2010

Roger Bustamante

- En la Figura 1 se muestra una parte de una máquina llamada 'destoconadora' (usada para cortar partes de troncos pegados al suelo). Su peso es de 3000N y el centro de gravedad está ubicado en G . En la posición presentada el miembro CE está horizontal y los dientes de la sierra circular están a ras de suelo. Si la magnitud de la fuerza F ejercida por el disco de la sierra sobre el tronco es de 500N, determine la fuerza P sobre el cilindro hidráulico y la magnitud de la fuerza que soporta el pasador C . Todas las dimensiones están en milímetros. En la parte inferior derecha se presenta un detalle de la forma como actúa la fuerza F sobre el tronco. (15 puntos)

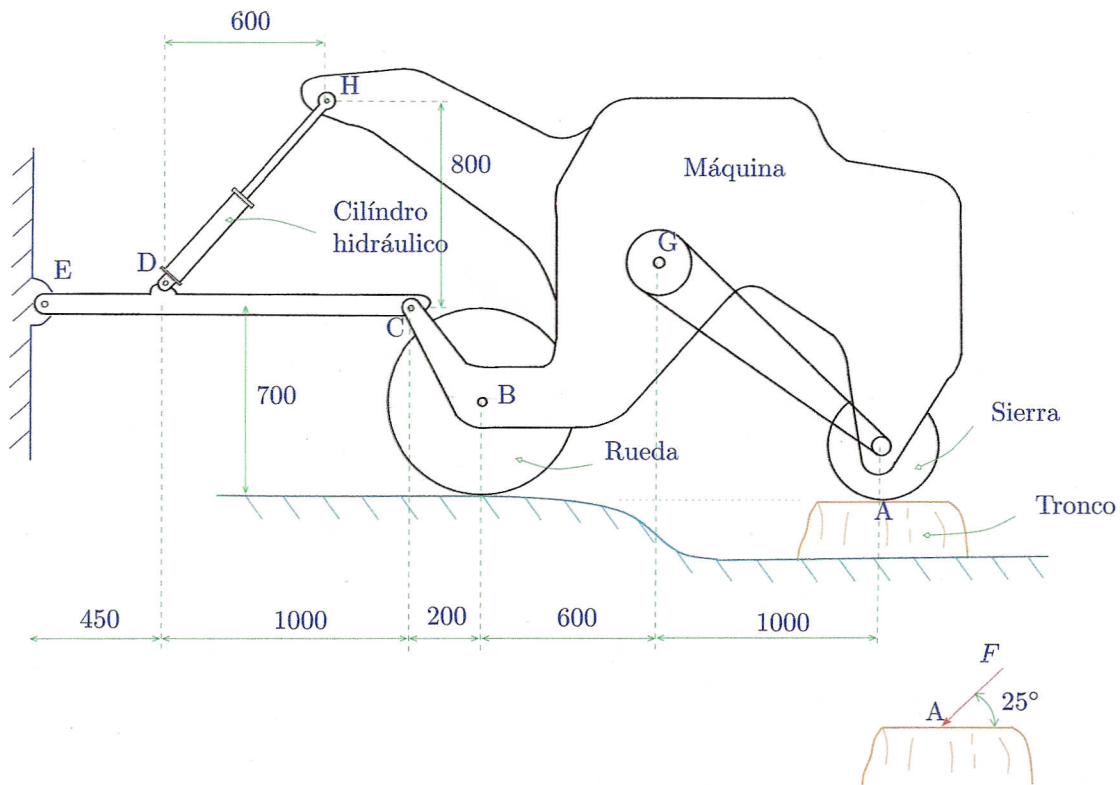


Figura 1: Máquina destoconadora.

- Las dos barras pegadas de la Figura 2, cuya sección transversal es de área A , están pegadas a dos muros rígidos. A la temperatura ambiente inicial las barras están libres de esfuerzos. La barra (1) tiene un coeficiente de expansión térmica α_1 y un módulo de elasticidad E_1 , en tanto que la barra (2) tiene un coeficiente de expansión térmica α_2 con módulo E_2 ; tanto α como E se asumen aproximadamente constantes en función de la temperatura para las

dos barras. Asuma ahora que ambas barras sufren un aumento uniforme de temperatura ΔT . Determine la fuerza que las paredes ejercen sobre las barras en este caso, así como el desplazamiento de la interface entre las barras. (20 puntos)

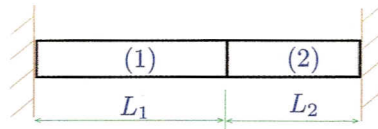


Figura 2: Barras bajo el efecto de un aumento de la temperatura

3. El eje circular AB mostrado en la Figura 3 está pegado en sus dos extremos a paredes rígidas. El eje tiene una parte con un orificio en su centro. El diámetro del eje es D en tanto que el diámetro del agujero es d y su módulo de corte es G . ¿A que distancia x se debe aplicar T_o de forma tal que las reacciones en las paredes en A y B sean iguales? (20 puntos)

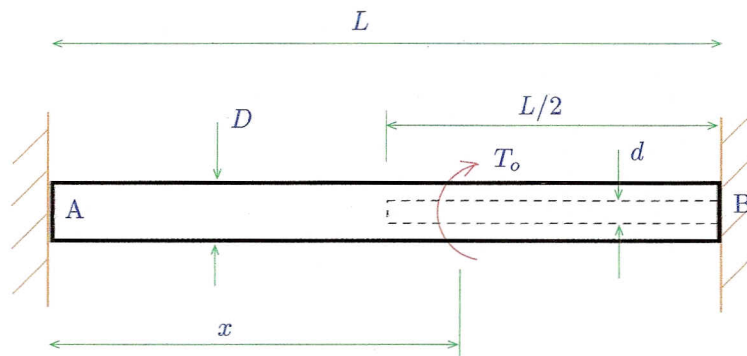


Figura 3: Cilindro parcialmente hueco bajo la acción de un torque.

4. Responda las siguientes preguntas conceptuales:

- a) A partir del cuadrado diferencial mostrado en la Figura 4, demuestre que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. (5 puntos)

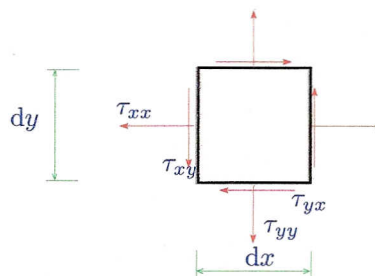


Figura 4: Cuadrado diferencial

- b) Explique en detalle el significado de la expresión $F'S = \frac{S_n}{\sigma_{adm}} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)$. (6 puntos)
- c) Indique porqué \underline{t} debe depender no solo de la posición \underline{x} sino también del vector normal \underline{n} . (4 puntos)

- d) Indique en detalle el significado de las tres relaciones mostradas aquí, así como de las distintas variables que aparecen en estas ecuaciones:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad T_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}.$$

(7 puntos)

- e) ¿Que significa decir que un material es lineal e inhomogeneo? (3 puntos)

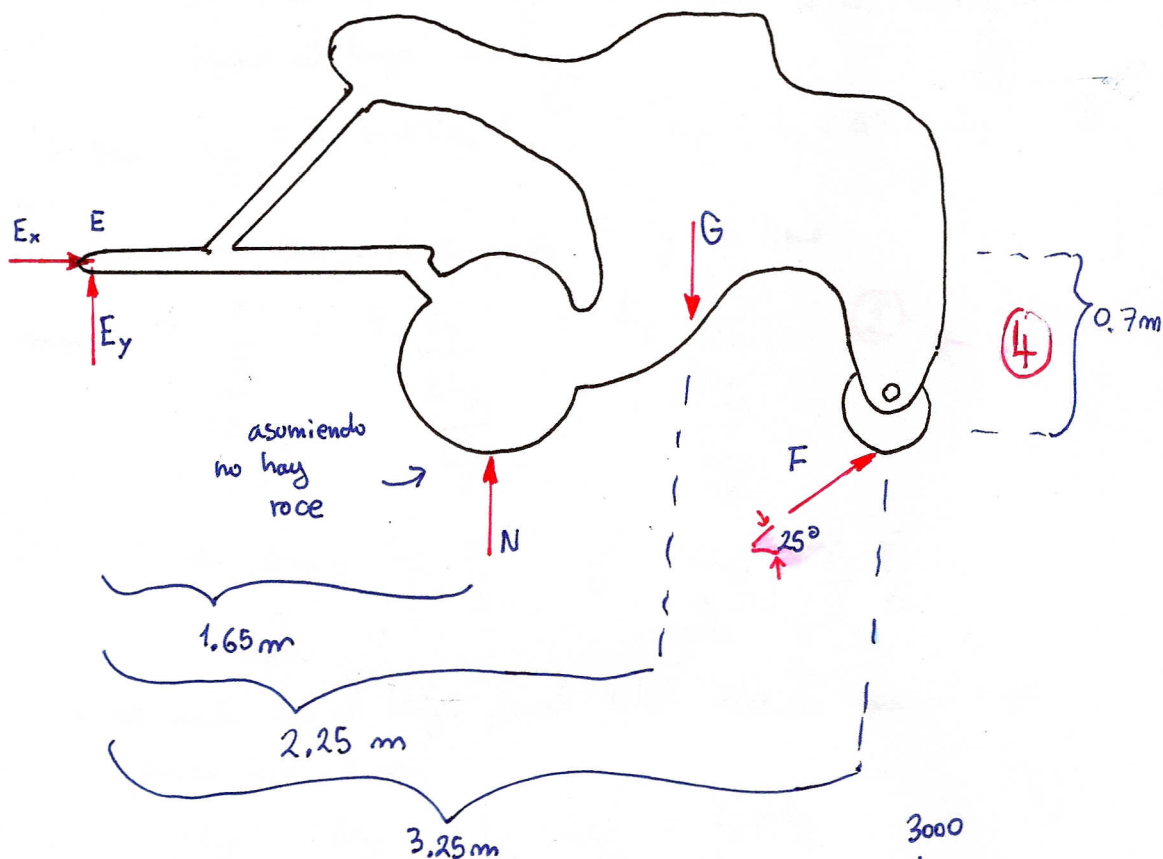
Formulario

- Deformación térmica: $\varepsilon_T = \alpha\Delta T$
- Torsión: $T = \frac{\theta GJ}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z}y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 dA$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_3x + c_4$.
Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$.
Otras expresiones $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$, $\frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta$.

1)

Pauta Examen

① DCL máquina completa



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow N * 1.65 + \underset{\substack{\uparrow \\ 500}}{F \sin 25} * 3.25 + F \cos 25 * 0.7 = G * 2.25$$

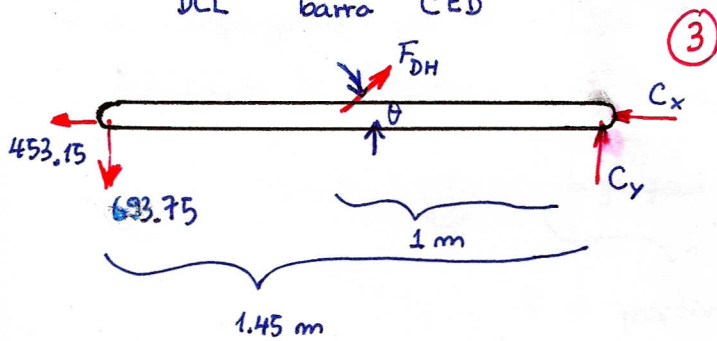
$$\Rightarrow N = 3482.44 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x = -F \cos 25 = -453.15 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = G - N - F \sin 25 = -693.75 \text{ N}$$

DCL barra CED

2



$$\theta = \arctan\left(\frac{800}{600}\right) = 53,13^\circ$$

1

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow F_{DH} \sin \theta * 1 = 693,75 * 1,45 \Rightarrow F_{DH} = 1257,42 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = F_{DH} \cos \theta - 453,15 \Rightarrow C_x = 301,306 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 693,75 - F_{DH} \sin \theta \Rightarrow C_y = -312,1846 \text{ N}$$

luego $P = 1257,42 \text{ N}$

$$y \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 433,872 \text{ N}$$

- 3) (2) • Se resolverá el problema por superposición \Rightarrow Primero se asume que las barras se pueden alargar producto de ΔT sin restricción, y luego se aplica una fuerza de compresión de modo que el largo total final de las barras sea igual al largo inicial

• Sea $L_{f_1} = L_1 + \Delta T \alpha_1 L_1$ (1) $L_{f_2} = L_2 + \Delta T \alpha_2 L_2$ (1) *

- Aparece una fuerza de compresión F y se tiene

Compresión $\rightarrow \underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{esfuerzo}} = E_1 \underbrace{\frac{\Delta L_{f_1}}{L_{f_1}}}_{\epsilon_1} = E_2 \underbrace{\frac{\Delta L_{f_2}}{L_{f_2}}}_{\epsilon_2}$ (2)

$\Rightarrow \Delta L_{f_1} = \frac{L_{f_1}}{E_1} \frac{F}{A}$ y $\Delta L_{f_2} = \frac{L_{f_2}}{E_2} \frac{F}{A}$
 \uparrow \uparrow
acorta acorta

- De modo que el largo final total debe ser igual al largo inicial total, o sea

$L_{f_1} - \Delta L_{f_1} + L_{f_2} - \Delta L_{f_2} = L_1 + L_2$ (5)

$\Rightarrow L_{f_1} \left(1 - \frac{F}{E_1 A}\right) + L_{f_2} \left(1 - \frac{F}{E_2 A}\right) = L_1 + L_2$

de * $\Rightarrow (L_1 + \Delta T \alpha_1 L_1) \left(1 - \frac{F}{E_1 A}\right) + (L_2 + \Delta T \alpha_2 L_2) \left(1 - \frac{F}{E_2 A}\right) = L_1 + L_2$ (2)

$\Rightarrow F = \frac{A \Delta T E_1 E_2 (L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2)}{L_1 (E_2 + \Delta T E_2 \alpha_1) + E_1 L_2 (1 + \Delta T \alpha_2)}$ (4)

- El desplazamiento de la interfase se puede ver, por ejemplo, estudiando la diferencia $L_{f_1} - \Delta L_{f_1} - L_1$

(3)

largo final (1) ↑
largo inicial

Si es positivo \Rightarrow se mueve hacia la derecha

Si es negativo \Rightarrow hacia la izquierda

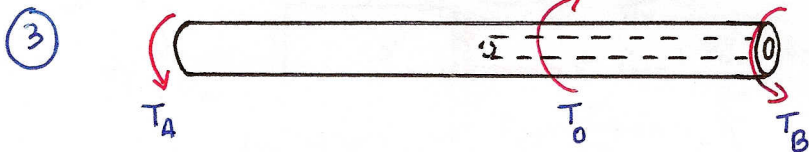
0 \Rightarrow no se mueve

• Se tiene

$$L_{f_1} - \Delta L_{f_1} - L_1 = \frac{\Delta T L_1 L_2 (\alpha_1 [E_1 + \Delta T \{E_1 - E_2\} \alpha_2] - E_2 \alpha_2)}{L_1 (E_2 + \Delta T E_2 \alpha_1) + E_1 L_2 (1 + \Delta T \alpha_2)}$$

(2)

5) DCL cilindro completo

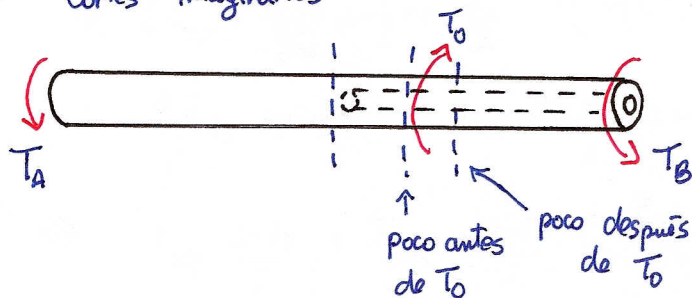


T_A : torque reacción pared A

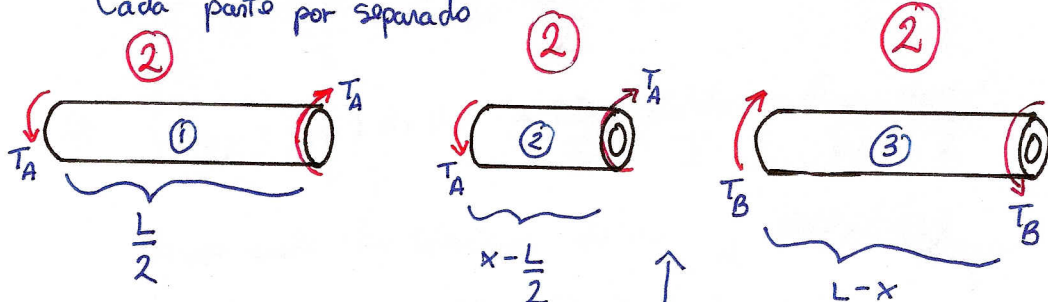
T_B : torque reacción pared B

equilibrio: $T_A + T_B = T_0$ (1) *

Cortes imaginarios



Cada punto por separado



$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3$ (**)

se tiene

$$\Delta\theta_1 = \frac{L_1 T_1}{G J_1} \quad L_1 = \frac{L}{2} \quad T_1 = T_A$$

$$J_1 = \frac{\pi D^4}{32}$$

ángulo total por el lado izquierdo de ser igual al ángulo por el lado derecho de forma tal que el cilindro deformado sea continuo

(4)

$\Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{16 L T_A}{\pi G D^4}$ (1)

$$\Delta\theta_2 = \frac{L_2 T_2}{G J_2} \quad L_2 = x - \frac{L}{2} \quad J_2 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad (i)$$

16

$$\Rightarrow \Delta\theta_2 = \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{T_A}{G \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}$$

finalmente

$$\Delta\theta_3 = (L - x) \frac{T_B}{G \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} \quad (1)$$

Pero se quiere buscar
x tal que $T_A = T_B$
 \Rightarrow de (*) se tiene
 $T_A = T_B = \frac{T_0}{2} \quad (1)$

Luego de (**) tenemos

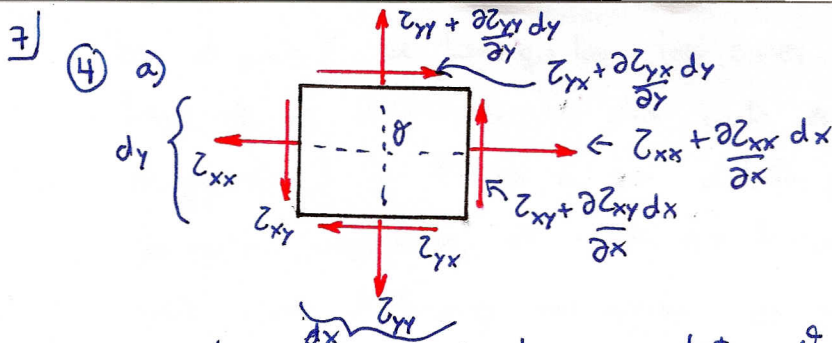
$$\frac{16 L T_0}{2 \pi G D^4} + \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{T_0}{2 G \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = (L - x) \frac{T_0}{2 G \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(d^4 - 2D^4) L}{4 D^4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{L}{2} \left(\frac{d^4}{2D^4} + 1 \right) \quad (4)$$

mayor que 1
mayor que $L/2$

(también se puede ver que
es menor a L)



haciendo suma de torques respecto a θ

$$\Rightarrow (z_{xy} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} - (z_{yx} + \frac{\partial z_{yx}}{\partial y} dy) dx \frac{dy}{2} + z_{xy} dy \frac{dx}{2} - z_{yx} dx \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow z_{xy} \frac{dx dy}{2} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} \frac{dx^2 dy}{2} - z_{yx} \frac{dx dy}{2} - \frac{\partial z_{yx}}{\partial y} \frac{dx dy^2}{2} + z_{xy} \frac{dx dy}{2} - z_{yx} \frac{dx dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (z_{xy} - z_{yx}) dx dy + \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} \frac{dx^2 dy}{2} - \frac{\partial z_{yx}}{\partial y} \frac{dx dy^2}{2} = 0$$

despreciando los términos $dx^2 dy$ y $dx dy^2$

nos queda $(z_{xy} - z_{yx}) dx dy = 0$

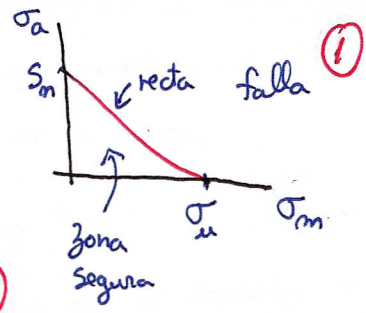
$$\Rightarrow z_{xy} = z_{yx}$$

b)

$$FS = \frac{S_m}{\sigma_{adm}} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)$$

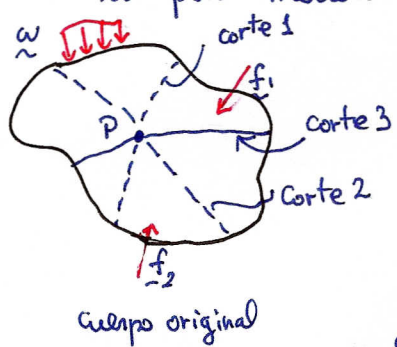
← se usa en estudio de fatiga, cuando se aplica un esfuerzo medio (tracción) σ_m y un esfuerzo alternante σ_a

- Viene de la recta de Goodman.
- Esta recta define una zona segura en la que no hay falla por fatiga si (σ_m, σ_a) están bajo la recta

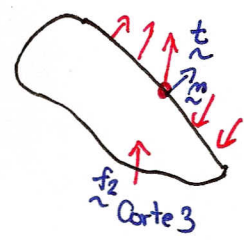
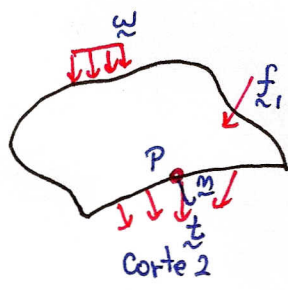
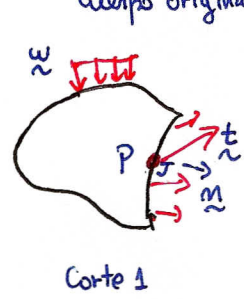


- S_m : resistencia a la fatiga (sin σ_m), de ingeniería
- σ_u : esfuerzo último o de rotura
- FS : factor de seguridad. Se define asumiendo que σ_m es un dato fijo, y por tanto se puede variar σ_a de forma de alejarnos de la recta y límite de falla $\Rightarrow \sigma_{adm}$: es el esfuerzo alterno admisible asociado al FS.

c) \vec{t} es conocido como el vector de esfuerzos \Rightarrow se usa sobre todo para modelar la distribución de fuerzas internas



\vec{t} aparece en las superficies de corte imaginario \Rightarrow en general no es uniforme \Rightarrow o sea depende de la posición \vec{x}



9) Para el punto P se tiene que los tres cortes pasan por ese punto, luego \underline{x} es el mismo. Por otra parte es fácil apreciar que en general \underline{t} en P va a ser distinto para cada uno de los cortes imaginarios, de modo que \underline{t} debe depender de algo más aparte de \underline{x} , y una opción es \underline{m} ← vector normal unitario a la superficie de corte en P. Se ve que \underline{m} (2) es diferente para cada uno de estos casos, luego

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, \underline{m})$$

d)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

suma en j

para $i=1, 2, 3$

← ecuación de equilibrio (1)

T_{ij} componente ij del tensor de esfuerzos \underline{T} (1)

b_i componente i del vector de fuerzas de cuerpo (1)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$i, j = 1, 2, 3$

← relación desplazamiento - deformación (1)

ε_{ij} componente ij del tensor de deformación $\underline{\varepsilon}$ (1)

u_i component i del vector de

↑ desplazamientos (1)

cuanto se

mueve cada punto de un cuerpo

bajo la acción de fuerzas

$$T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\lambda \varepsilon_{kk}$$

\uparrow constantes \uparrow suma en k

$i, j = 1, 2, 3$

← ecuación constitutiva (relación esfuerzo - deformación), caso lineal, elástico, isotrópico (1)

e) Un material lineal es aquel cuyo modelo o relación entre el esfuerzo y la deformación es de la forma

$$T_{ij} = \underbrace{C_{ijkl}}_{\text{constantes que no dependen de la deformación}} \epsilon_{kl} \quad (2)$$

constantes que no dependen de la deformación

En el caso de un material inhomogeneo, las propiedades mecánicas dependen de la posición \underline{x} o sea

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}(\underline{x}) \quad (1)$$