

Examen, Resistencia de Materiales ME3202

1er semestre 2013

Profesores: R. Bustamante, E. Salas

- (24 puntos) En la Figura 1 hay una barra rígida de masa despreciable, la cual está conectada a dos varillas de aluminio y acero como se muestra en la figura. Si el sistema está originalmente libre de esfuerzos, determine el cambio de temperatura que permitiría conectar el switch. ¿Qué tipos de fallas se podrían producir en las varillas? Solo indique el tipo, no haga cálculos para esta parte de la pregunta.

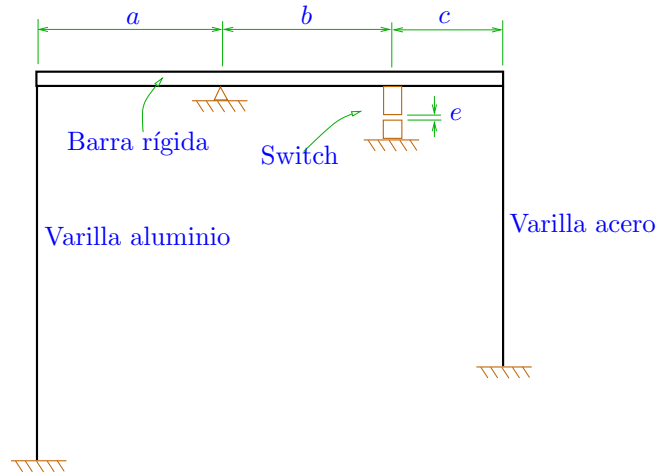


Figura 1: Barra rígida y dos varillas.

Datos: $a = 3\text{m}$, $b = 2,5\text{m}$, $c = 2\text{m}$; varilla aluminio $E_{al} = 70\text{GPa}$, $\alpha_{al} = 23\mu\text{m}/\text{mC}^\circ$, Largo $L_{al} = 6\text{m}$, diámetro $d_{al} = 2\text{cm}$; varilla acero $E_{ac} = 200\text{GPa}$, $\alpha_{ac} = 11,7\mu\text{m}/\text{mC}^\circ$, $L_{ac} = 4\text{m}$, $d_{ac} = 1\text{cm}$.

- (35 puntos) En la Figura 2 se tienen dos ejes conectados por medio de engranajes rígidos en B y C . El eje de aluminio tiene una sección rectangular de lados a , b con $a = 4\text{cm}$, $a/b = 1,5$, y propiedades mecánicas $G_{al} = 35\text{GPa}$, $E_{al} = 80\text{GPa}$, $\sigma_{0_{al}} = 200\text{MPa}$. El eje de bronce tiene una sección circular de diámetro $d = 3\text{cm}$, y propiedades mecánicas $G_{br} = 50\text{GPa}$, $E_{br} = 130\text{GPa}$, $\sigma_{0_{br}} = 300\text{MPa}$. ¿Cual es el torque máximo que se puede aplicar en A antes de que el sistema falle¹?

Datos: $L_1 = 1\text{m}$, $L_2 = 70\text{cm}$, $L_3 = 90\text{cm}$, $L_4 = 80\text{cm}$, $D_1 = 20\text{cm}$, $D_2 = 10\text{cm}$.

¹Por simplicidad asuma que los soportes A , N , K , H solo generan reacciones tipo fuerzas puntuales en las direcciones z e y , y en el caso de K , H torque en la dirección x . Asuma que los soportes de los dos ejes no generan momentos de reacción M_y , M_z . Los materiales de los ejes se pueden considerar como dúctiles.

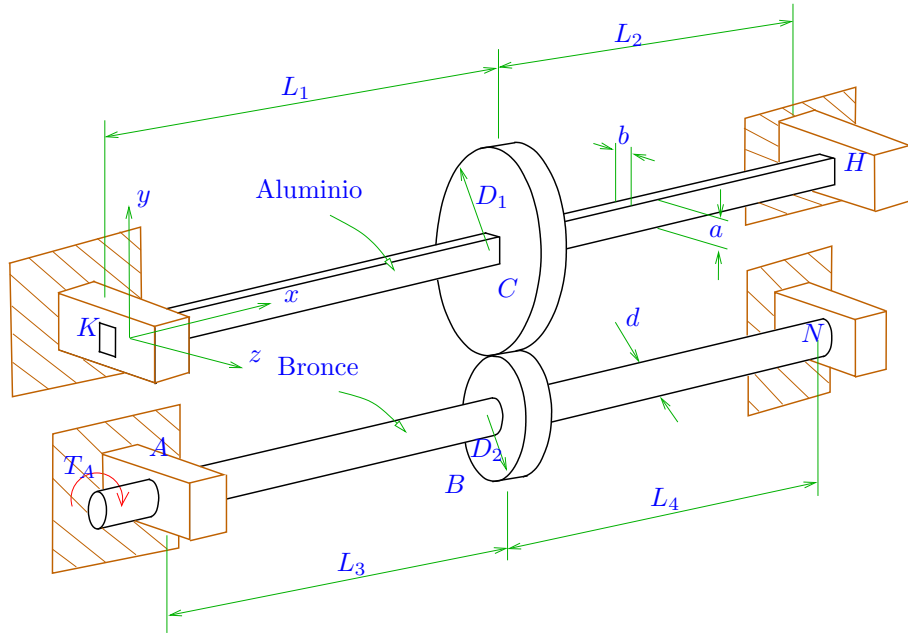


Figura 2: Ejes interactuando.

3. (20 puntos) Para la viga mostrada en la Figura 3 (izquierda), considerando la vista en detalle (ampliada) de la sección en el lado derecho de la figura, determine el valor del esfuerzo de corte debido a la máxima fuerza interna de corte en la posición del eje neutro.

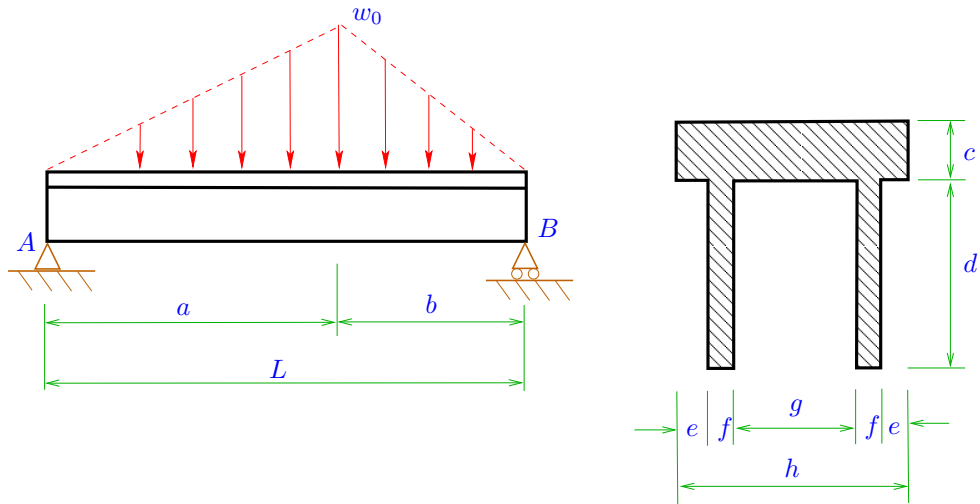


Figura 3: Viga en corte.

Datos: $L = 2\text{m}$, $a = 1,3\text{m}$, $b = 0,7\text{m}$, $w_0 = 10^3\text{N/m}$, $c = 5\text{cm}$, $d = 12\text{cm}$, $e = 1\text{cm}$, $f = 2\text{cm}$, $h = 15\text{cm}$, $g = 9\text{cm}$, $E = 210\text{GPa}$, $G = 75\text{GPa}$.

4. Responda las siguientes preguntas conceptuales:

a) (5 puntos) Escriba en notación indicial las ecuaciones de Navier.

- b) (5 puntos) Para la placa plana \mathcal{B} de la Figura 4, indique en detalle las condiciones de borde del problema de valor de frontera.

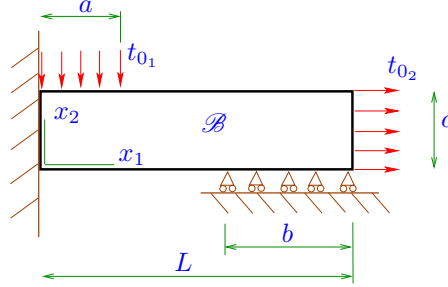


Figura 4: Placa empotrada.

- c) (5 puntos) Determine los esfuerzos principales para el tensor de esfuerzos con componentes $\tau_{11} = 10$, $\tau_{22} = -10$, $\tau_{33} = 5$, $\tau_{12} = 3$, $\tau_{13} = 0$, $\tau_{23} = -3$, donde las componentes están en MPa.

Formulario

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{T r}{J}$. Sección rectangular $\tau_{max} = T/(\kappa_1 a b^2)$, $J = \kappa_2 a b^3$,

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
κ_1	0,208	0,231	0,246	0,282	0,312	1/3
κ_2	0,141	0,296	0,229	0,281	0,312	1/3

Cuadro 1: Valores para las constantes κ_1 y κ_2 .

- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Eje sección rectangular $I_z = \frac{a b^3}{12}$, a base, b altura. Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{a b^3}{36}$, a base, b altura. Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$.
- Deflexión

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}, \quad \frac{d \hat{y}}{dx} \approx \theta(x),$$

$$\int \delta(x-a) dx = r(x-a), \quad \int r(x-a) dx = (x-a)r(x-a),$$

$$\int (x-a)r(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a),$$
- Corte en vigas: Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$, Sección arbitraria $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t} \int_y^c \xi dA$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.
- Ecuaciones básicas de elasticidad lineal: $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$, $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$, $I_1 = \text{tr } \underline{T}$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{T}^2))$, $I_3 = \det \underline{T}$.