

Examen, Resistencia de Materiales ME3202

2er semestre 2011-2012

Profesor: R. Bustamante

1. (20 puntos). En la Figura 1 se tiene una 'barra de remolque' que se conecta con el tractor H por medio del pasador E . Esta barra se debe enganchar con el tren de aterrizaje J del avión. Para ajustar el gancho F a la altura requerida, se usa un cilindro hidráulico CD . En

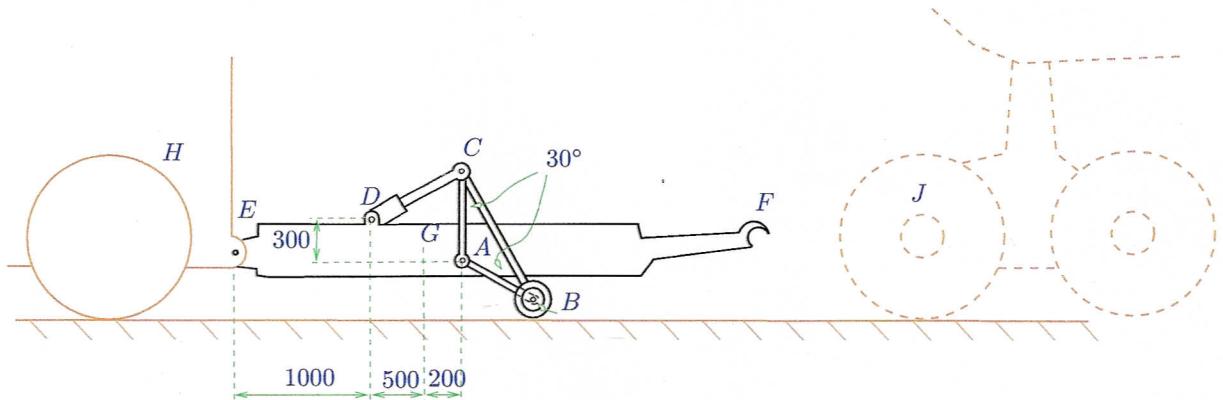


Figura 1: Barra de enganche.

la posición indicada por la figura, determine la fuerza que el pistón necesita proporcionar para mantener la barra en dicha posición.

El peso total de la barra es de 50kgf y tiene centro de gravedad en el punto G . Las dimensiones están en milímetros. En el punto B las barras AB y BC se conectan a un pasador común con una rueda. $AB = AC = 500$ milímetros.

2. (28 puntos). La Figura 2 muestra dos vigas de sección circular y largo L las cuales están empotradas en sus extremos izquierdos. La viga inferior está sometida a una fuerza puntual P y está conectada a través de un cable de diámetro d_c a una polea rígida, la que está pegada a la viga superior. Determine la fuerza que se transmitiría a través del cable a la polea. Las vigas y el cable tiene un módulo de Young de E , en tanto que las dos vigas tiene además un módulo de corte G .

Datos: $L = 3\text{m}$, $H = 1.6\text{m}$, $D = 30\text{cm}$, $d = 10\text{cm}$, $E = 210\text{GPa}$, $G = 70\text{GPa}$, $d_c = 0.8\text{cm}$.

Use el método de la ecuación de la elástica.

3. (15 puntos). La Figura 3(a) es la vista isométrica de una estructura de un molino eólico de gran tamaño. Al diseñar surge la duda de cómo disponer la veleta (que sirve para que la estructura 'siga' al viento). Se desea tener la máxima área de la veleta, siempre y cuando no ocurra pandeo. Si la estructura se modela como lo muestra la Figura 3(b), con d la distancia horizontal constante entre el eje de la estructura y la veleta, y a la altura de la veleta por determinar, encuentre el máximo valor de a para que no ocurra pandeo.

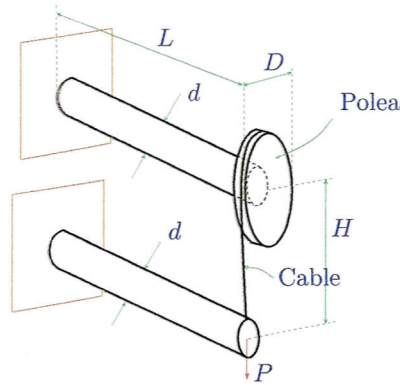


Figura 2: Dos vigas cilíndricas unidas por un cable.

Considere que solo la veleta compuesta de acero con $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ y espesor de 2 mm contribuye peso. La sección transversal del eje vertical es un tubo con diámetro exterior ϕ_e e interior ϕ_i .

Datos: $h=30 \text{ m}$, $d=50 \text{ cm}$, $L=1\text{m}$, $\phi_i=34\text{mm}$, $\phi_e=38\text{mm}$, $E = 210\text{GPa}$.

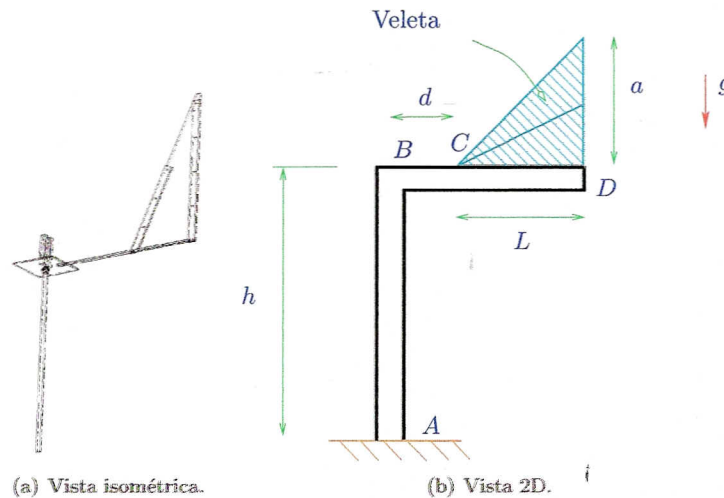


Figura 3: Veleta.

4. Preguntas conceptuales:

- a) (3 puntos) ¿Que son o que representan las ecuaciones de equilibrio?

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

¿Como se obtienen estas ecuaciones?

- b) (2 puntos) ¿Que es un material homogéneo?

- c) (1 punto) Indique 3 fenómenos que se pueden considerar como falla.

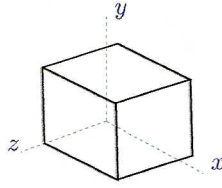


Figura 4: Cubo diferencial

d) (4 puntos) Grafique los esfuerzos en el cubo de la Figura 4.

(i) $\sigma_x = -1$, $\tau_{xy} = -3$, $\tau_{xz} = 3$, $\tau_{yz} = -1$, $\sigma_y = 8$, $\sigma_z = 0$.

(ii) $\sigma_{VM} = 10$.

Formularion

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{T r}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Eje sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$, a base, b altura. Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{ab^3}{36}$, a base, b altura. Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$.

- Deflexión

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}, \quad \frac{d \hat{y}}{dx} \approx \theta(x),$$

$$\int \delta(x-a) dx = r(x-a), \quad \int r(x-a) dx = (x-a)r(x-a),$$

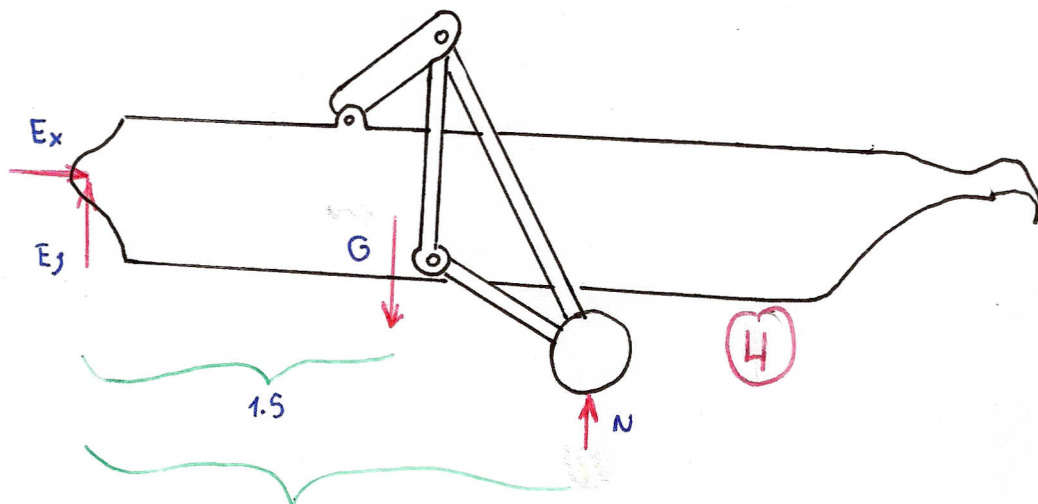
$$\int (x-a)r(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a),$$

- Corte en vigas, Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$,
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_3 x + c_4$.

Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$, e excentricidad, L largo total columna. Solución $\hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) - e$. Caso $\hat{y}(0) = 0$ y

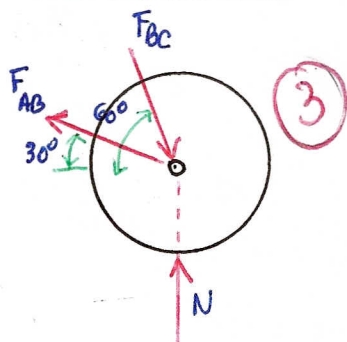
$$\hat{y}(L) = 0, \quad C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L)]}{\sin(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L)}, \quad C_2 = e.$$

①

DCL "barra de remolque" completa

$$1.7 + 0.5 \cos 30^\circ = 2.133$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow N * 2.133 = G * 1.5 \Rightarrow N = 35.16 \text{ kgf} \quad (3)$$

DCL rueda B

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AB} \cos 30^\circ + F_{BC} \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB} = F_{BC} \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} \quad (1)$$

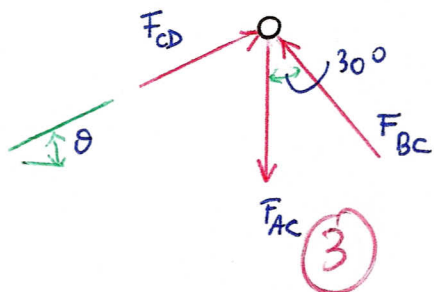
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F_{AB} \sin 30^\circ = F_{BC} \sin 60^\circ$$

$$F_{BC} \cos 60^\circ \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{N}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ \tan 30^\circ} = 60.89 \text{ kgf} \quad (3)$$

DCL pasador C

2



$$\theta = \arctan\left(\frac{200}{700}\right) = 15.9^\circ$$

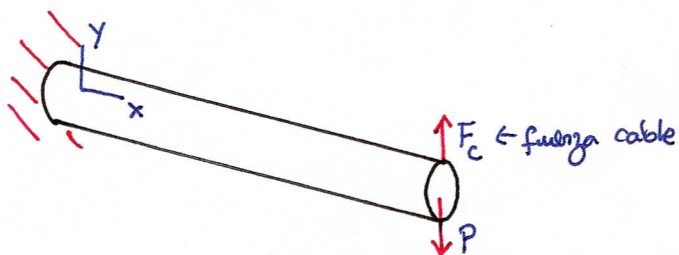
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} \cos \theta = F_{BC} \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow F_{CD} = 31.66 \text{ kgf} \quad (3)$$

↑
fuerza piston

3]

①

DCL viga inferior Δ : desplazamiento vertical extremo

se tiene

$$\Delta = \underbrace{\Delta L_{\text{cable}}}_{\text{alargamiento cable}} + \underbrace{\Delta L_{\text{torsión}}}_{\text{desenrolla por torsión}} + \underbrace{\Delta L_{\text{superior}}}_{\text{desplazamiento vertical viga superior}} \quad (*)$$

• Cálculo Δ : Elástica

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} = 0 \Rightarrow \hat{y}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$CB: \hat{y}(0) = 0$$

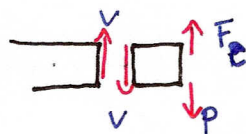
①

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0$$

empotrado ①

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(L) = 0$$

①



$$V(L) = F_c - P$$

$$-EI \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3}(L) \quad ④$$

$$\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow 2C_2 + 6C_3 L = 0 \Rightarrow C_2 = -3C_3 L$$

$$\frac{d^3 \hat{y}}{dx^3}(L) = \frac{P - F_c}{EI} \Rightarrow C_3 = \frac{P - F_c}{6EI} \Rightarrow C_2 = \frac{(F_c - P)L}{2EI}$$

$$\text{luego } \Delta = \hat{y}(L) = C_2 L^2 + C_3 L^3 = \frac{(F_c - P)L^3}{2EI} + \frac{(P - F_c)L^3}{6EI}$$

$$= \frac{(F_c - P)L^3}{3EI} \quad ②$$

como valor absoluto

$$\Delta = \frac{(P - F_c)L^3}{3EI}$$

• Cálculo ΔL_{cable}

$$\frac{\Delta L_{\text{cable}}}{H} = \frac{F_c}{A_{\text{cable}}} \frac{1}{E} \Rightarrow \Delta L_{\text{cable}} = \frac{4 F_c H}{\pi d_c^2 E} \quad (3)$$

• Cálculo $\Delta L_{\text{torsión}}$

$$\Delta L_{\text{torsión}} = \underbrace{\Delta \theta}_{\text{torsión viga superior}} \frac{D}{2} \quad (1)$$

$$\Delta \theta = \frac{T L}{G J}$$

$$T = F_c \frac{D}{2}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow \Delta L_{\text{torsión}} = F_c \frac{D}{2} \frac{L}{G \frac{\pi d^4}{32}} \frac{D}{2} = \frac{8 F_c D^2 L}{\pi G d^4} \quad (2)$$

• Cálculo $\Delta L_{\text{superior}}$: elástica

$$V(L) = -F_c \quad (1) \quad C_0 = 0 \quad C_1 = 0 \quad C_3 = \frac{F_c}{6EI}$$

$$\Rightarrow \Delta L_{\text{superior}} = C_2 L^2 + C_3 L^3$$

$$= \frac{-F_c L^3}{2EI} + \frac{F_c L^3}{6EI} = \frac{-F_c L^3}{3EI} \quad (2)$$

$$C_2 = -\frac{F_c L}{2EI}$$

valor absoluto

$$\Delta L_{\text{superior}} = \frac{F_c L^3}{3EI}$$

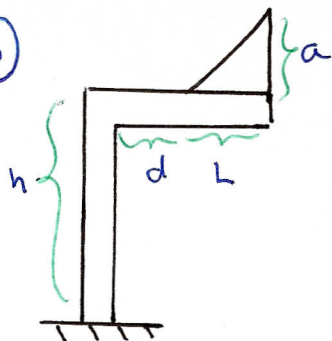
$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\Rightarrow (*) \quad \frac{(P - F_c) L^3}{3EI} = \frac{4 F_c H}{\pi d_c^2 E} + \frac{8 F_c D^2 L}{\pi G d^4} + \frac{F_c L^3}{3EI} \quad (2)$$

$$\Rightarrow F_c = \frac{64 d_c^2 G L^3 P}{12 d^4 G H + d_c^2 L (24 D^2 E + 127 G L^2)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow F_c = 0.4968 P \quad (2)$$

5/ (3)



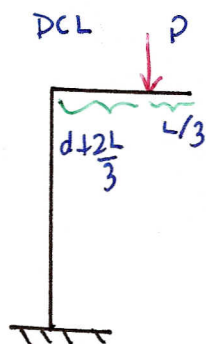
$$\rho_{\text{velho}} = 7900 \text{ kg/m}^3 \quad d = 50 \text{ cm}$$

$$e = 2 \text{ mm} \quad L = 1 \text{ m}$$

$$\phi_e = 38 \text{ mm}$$

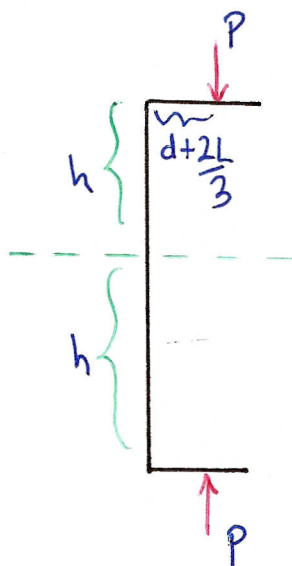
$$\phi_i = 34 \text{ mm} \quad E = 210 \text{ GPa}$$

$$h = 30 \text{ m}$$



$$P = \frac{aL}{2} e f g = 77.42 a \quad (2)$$

(3) Equivalente a problema de columna cargada excêntrica en ambos extremos de largo $2h$



2do momento de área

$$(2) \quad I_z = \frac{\pi}{64} (\phi_e^4 - \phi_i^4) = 3.68 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

do formulário

$$(1) \quad \hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right)$$

$$-e \rightarrow d + \frac{2L}{3}$$

$$(2) \quad \hat{y}(0) = 0 \quad \hat{y}(2h) = 0$$

$$\text{donde } C_1 = \frac{e \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} 2h \right) \right]}{\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} 2h \right)}$$

$$C_2 = e$$

6

luego pundo

$$\sqrt{\frac{P}{EI_z}} 2h = \pi$$

3

$$\Rightarrow P = \frac{\pi^2}{4h^2} EI_z$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi^2}{4h^2} \frac{EI_z}{77.42}$$

$$a = 0.2737 \text{ m}$$

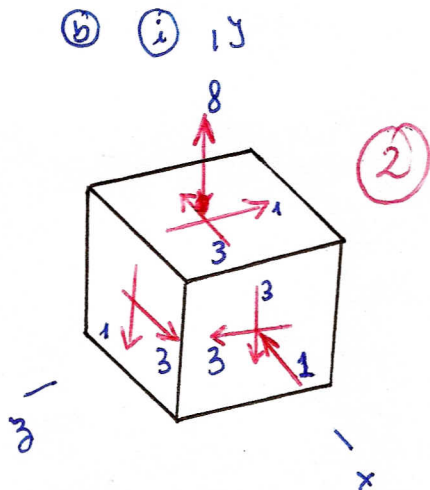
2

- ④ ② Las ecuaciones de equilibrio se obtienen se hacen suma de fuerzas igual a cero, para la dirección horizontal y vertical para un cuadrado diferencial de lados dx , dy .

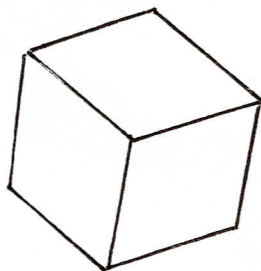
Estas ecuaciones representan entonces el equilibrio que se pide para cada punto en el interior de un cuerpo. ①

- ⑥ Un material homogéneo es aquel en el que las propiedades mecánicas se asemejan constantes para distintas posiciones a lo largo y ancho de un cuerpo. ②

- ③ Formación de deformación plástica
Exceso de deformación elástica
Rotura por grietas ①



(ii)



El esfuerzo de Von Mises no se puede dibujar, pues no es un esfuerzo en el sentido real, proviene de una expresión de energía.

(2)