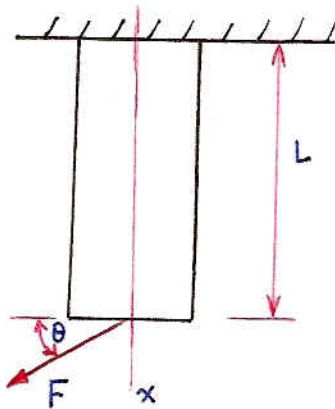


### Control 3. Resistencia de Materiales ME 46A-2.

07/11/2008

Profesor: Roger Bustamante

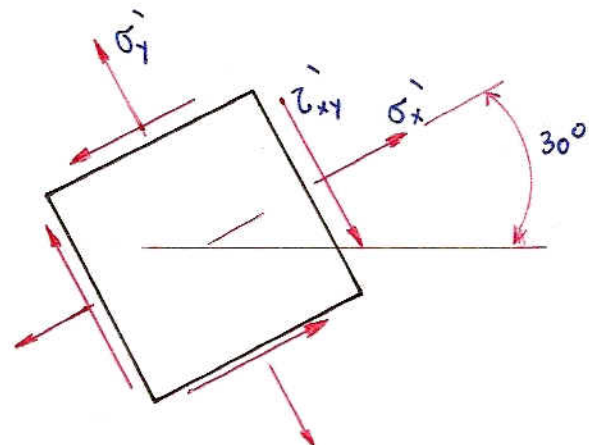
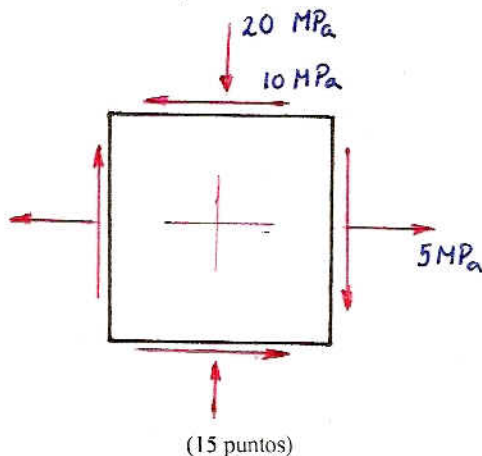
- 1) El eje de la figura está suspendido desde el techo, su sección es circular de diámetro  $D$ . Una fuerza  $F$  se aplica en su centro en el extremo  $x = L$ . El peso específico es  $\gamma$ . ¿En qué zona se producen las máximas fuerzas internas y momentos internos? Determine dichas fuerzas y momento interno. Determine el máximo estado de esfuerzos causados por dichas fuerzas. Con ese estado de esfuerzos determine el esfuerzo normal máximo, mínimo y el máximo esfuerzo de corte. (25 puntos)



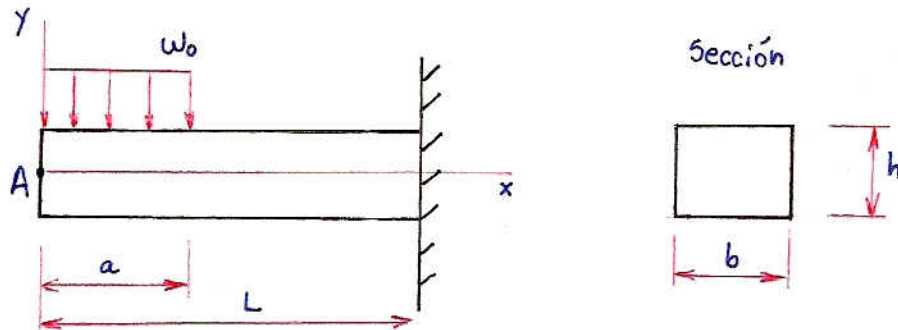
Datos:  $D = 30 \text{ cm}$      $\gamma = 87 \text{ kN/m}^3$      $L = 80 \text{ cm}$      $F = 10 \text{ kN}$      $\theta = 85^\circ$

- 2) Considere el cuadrado diferencial de la figura en donde se pueden ver las componentes del tensor de esfuerzo para un punto de un cuerpo. Usando el círculo de Mohr:

- Determine los esfuerzos normal máximo y mínimo, y el ángulo que debe rotar el cuadrado diferencial para lograr dichos valores.
- Determine el máximo esfuerzo de corte.
- Determine el estado de esfuerzos para un cuadrado diferencial rotado en  $30^\circ$  tal como lo indica la figura.
- Indique si se producirá o no falla usando el criterio de Von Mises con un factor de seguridad  $FS = 2$  y esfuerzo de fluencia  $\sigma_0 = 55 \text{ MPa}$



- 3) Considere la viga de sección rectangular de la figura. La viga esta empotrada en el extremo derecho y esta sometida a una carga uniforme  $w_0$ . Usando Castigliano determine el ángulo de inclinación de la viga en el punto A. (20 puntos)



#### Formulario

Torsión  $T = \frac{\theta GJ}{L}$

Sección circular  $J = \frac{\pi D^4}{32}$

$\tau = \frac{Tr}{J}$

#### Flexión

Esfuerzo  $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z} y$

2do momento de área: Sección rectangular  $I_z = \frac{ab^3}{12}$

Sección circular  $I_z = \pi \frac{D^4}{64}$

#### Corte viga sección arbitraria

$$\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$$

#### Energía de deformación

Flexión  $U_f = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx$

Corte (sección rectangular)  $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{1}{GA} V(x)^2 dx$  A: área de la sección

#### Esfuerzos normal y de corte máximos

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

#### Esfuerzo de Von Mises

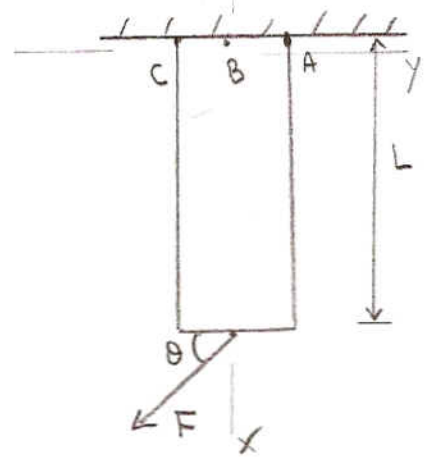
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Pauta Control 3

sección circular, peso específico  $\gamma = 87 \text{ kN/m}^3$

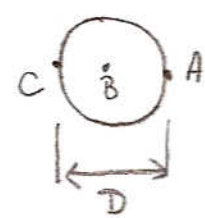
(a)

(1)



en esta zona se ubica probablemente los máximos esfuerzos

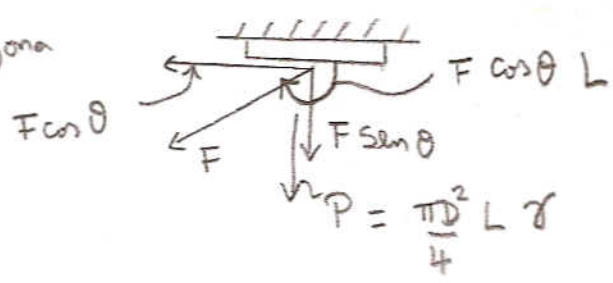
$\theta = 85^\circ$



(5)

- A :
- tracción por P
  - tracción por  $F \sin \theta$
  - tracción por momento flexo  $FL \cos \theta$

en esa zona



- B :
- tracción por P
  - tracción por  $F \sin \theta$
  - corte por  $F \cos \theta$

- C :
- tracción por P
  - tracción por  $F \sin \theta$
  - compresión por momento flexo  $FL \cos \theta$

→ analizaremos solo los puntos A y B

(A) tracción por P  $\sigma_x = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}} = L \gamma = 69,6 \text{ kPa}$  (2)

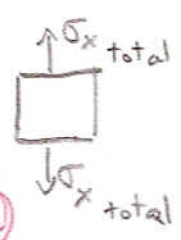
tracción por  $F \sin \theta$   $\sigma_x = \frac{F \sin \theta}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{D^2} \sin \theta = 14993 \text{ kPa}$  (2)

tracción por flexión  $\sigma_x = \frac{M y}{I_z}$   $I_z = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4$   $y = \frac{D}{2}$   
 Sin signo  $M = FL \cos \theta$  (3)

$\sigma_x = \frac{FL \cos \theta \cdot D/2}{\frac{\pi}{4} (D/2)^4} = \frac{FL \cos \theta}{\frac{\pi}{4} (D/2)^3} = \frac{2^5 FL \cos \theta}{\pi D^3} = \frac{32 FL \cos \theta}{\pi D^3} = 263,04 \text{ kPa}$

⇒  $\sigma_{x \text{ total}} = L \gamma + \frac{4}{\pi} \frac{F}{D^2} \sin \theta + \frac{32}{\pi D^3} FL \cos \theta$  (2)  
 $= 473,57 \text{ kPa}$

⇒  $\sigma_m = \begin{cases} \sigma_{x \text{ total}} & \text{ref. normal máximo} \\ 0 & \text{" " mínimo} \end{cases}$  (2)



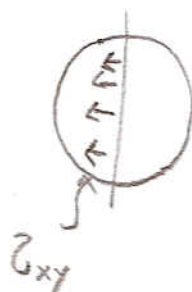
$\tau = \pm \frac{\sigma_{x \text{ total}}}{2} = \pm 236,785 \text{ kPa}$  (1)

(B)

tracción por  $P$   $\sigma_x = LY = 69,6 \text{ kPa}$

tracción por  $F \sin \theta$   $\sigma_x = \frac{4F \sin \theta}{\pi D^2} = 149,93 \text{ kPa}$

corta por  $F \cos \theta$

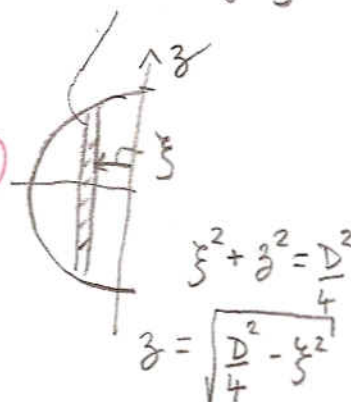


$$Z_{xy} = \frac{V}{I} \int y \, dA$$

$$t=D \quad I = \frac{\pi D^4}{64} \quad y=0 \quad C=D/2$$

$$V = F \cos \theta$$

(3)

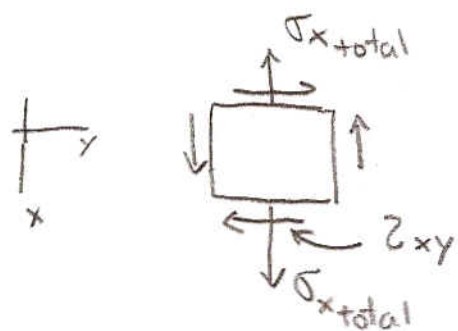


$$Z_{xy} = \frac{F \cos \theta}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right) \frac{D}{2}} \int_0^{D/2} 2 \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2} y \, dy$$

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)^{3/2} \bigg|_0^{D/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{D^2}{4}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow Z_{xy} = \frac{F \cos \theta}{\frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{4} \frac{D}{2}} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{F \cos \theta}{\frac{\pi D^2}{16}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3\pi} \frac{F \cos \theta}{D^2} = 32,88 \text{ kPa}$$

sin signo, el sentido se da después



$$\sigma_{x+total} = LY + \frac{4F \sin \theta}{\pi D^2} = 210,53$$

(1)

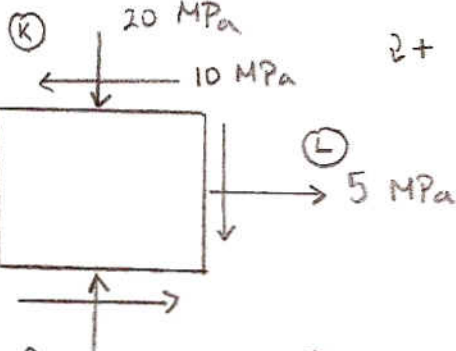
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{x+total}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_{x+total}^2}{4} + Z_{xy}^2} = \begin{cases} 215,54 \text{ kPa} \\ -5,0156 \text{ kPa} \end{cases}$$

(1)

$$Z = \sqrt{\frac{\sigma_{x+total}^2}{4} + Z_{xy}^2} = 110,28$$

(1)

(2)



$$\sigma_0 = 55 \text{ MPa}$$

(a)

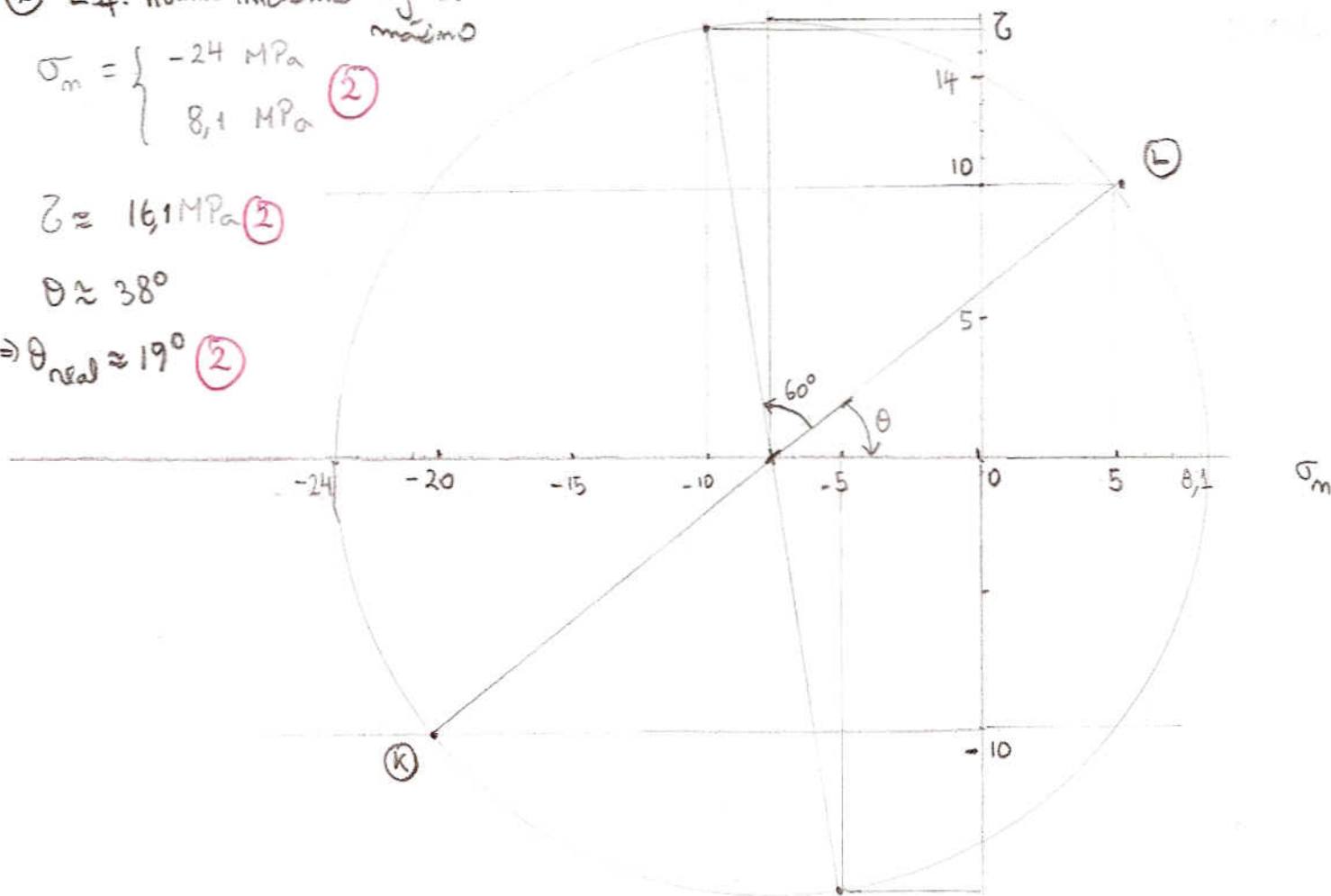
i) Est. normal máximo y corte máximo

$$\sigma_m = \begin{cases} -24 \text{ MPa} \\ 8,1 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2)$$

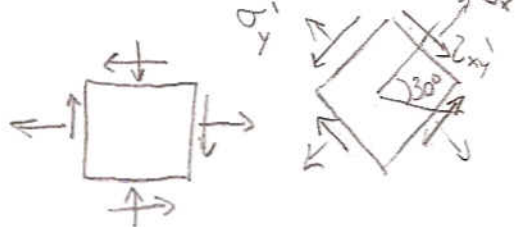
$$\tau \approx 16,1 \text{ MPa} \quad (2)$$

$$\theta \approx 38^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_{real} \approx 19^\circ \quad (2)$$



ii) estado de esfuerzo rotado a  $30^\circ$



$30^\circ \rightarrow 60^\circ$  en círculo de Mohr

(4)

$$\sigma'_y = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_x = -5 \text{ MPa} \quad \tau'_{xy} \approx 15,7 \text{ MPa}$$

iii) falla? Von Mises  
factor de seguridad  
FS = 2

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_0$$

(5)

$$28,913$$

$$\frac{\sigma_0}{F.S.}$$

$$27,5$$

$\Rightarrow$  falla con

ese factor de seguridad

$$\sigma_1 = -24$$

$$\sigma_2 = 8,1$$

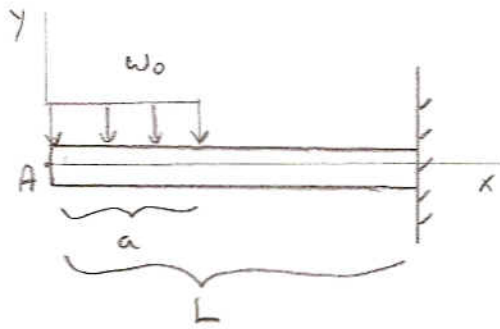
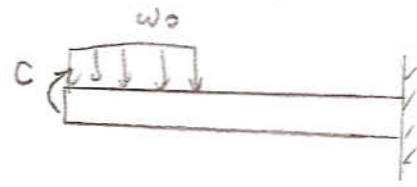
$$\sigma_0 = 55$$



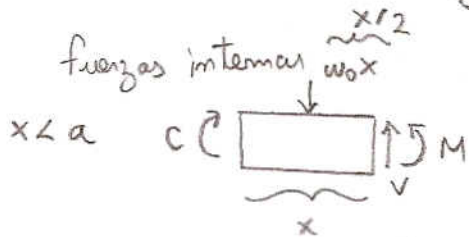
(3)

Viga sección rectangular

(a)

Castiglione  $\rightarrow$  ángulo en A, agregue momento puro en A

(3)

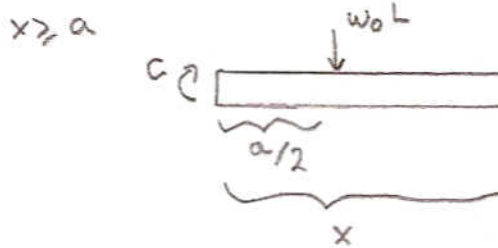


$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

$$V = w_0 x$$

$$M = C - w_0 \frac{x^2}{2}$$

(1)



$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

$$V = -w_0 L$$

$$M = C - w_0 L (x - a/2)$$

(1)

 $U_T \leftarrow$  energía total acumulada

$$U_T = U_f + U_c$$

flexión      corte

(2)

$$\theta_A = \frac{\partial U_T}{\partial C} \quad \text{para } C=0 \quad U_f = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx \Rightarrow \frac{\partial U_f}{\partial C} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial C} dx$$

(1)

sección rectangular

$$U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx \Rightarrow \frac{\partial U_c}{\partial C} = \frac{6}{5} GA \int_0^L V(x) \frac{\partial V(x)}{\partial C} dx$$

(1)

$$M(x) = \begin{cases} C - w_0 \frac{x^2}{2} & x < a \\ C - w_0 L (x - a/2) & x \geq a \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial C} = 1$$

(2)

$$V(x) = \begin{cases} w_0 x & x < a \\ -w_0 L & x \geq a \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial C} = 0$$

(2)

$$\Rightarrow \frac{\partial U_T}{\partial C} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^a (C - w_0 \frac{x^2}{2}) dx + \int_a^L C - w_0 L (x - a/2) dx \right\}$$

$$\underbrace{Cx - \frac{w_0 x^3}{6}}_0^a \quad \underbrace{Cx - \frac{w_0 L}{2} (x - a/2)^2}_a^L$$

$$Ca - \frac{w_0 a^3}{6} \quad C(L-a) - \frac{w_0 L}{2} [(L-a/2)^2 - (a/2)^2]$$

(3)

$$\theta_A = \frac{\partial U_T}{\partial C} \bigg|_{C=0} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{w_0 a^3}{6} - \frac{w_0 L}{2} [(L-a/2)^2 - (a/2)^2] \right\}$$

(4)