

Control 3, Resistencia de Materiales ME3202

1er semestre 2012

Profesor: R. Bustamante

1. En la Figura 1 tenemos una vista 3D de una pieza que forma parte del mecanismo de un teleférico. Para aprovechar la simetría de la geometría y de la manera como originalmente se aplican las cargas, se asume que el extremo izquierdo está empotrado, en tanto el extremo derecho está bajo el efecto de una fuerza F en el sentido del eje x y una fuerza Q en el sentido del eje y . En la figura central tenemos una vista ampliada de la sección de la viga en el plano $y - z$.

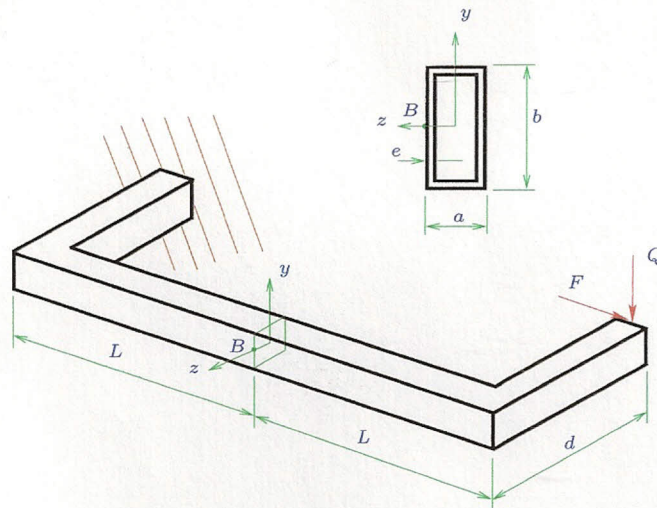


Figura 1: Pieza de teleférico

- Determine el estado de esfuerzos en el punto B indicado en la sección que se muestra en la figura principal, y que también se muestra en la vista de la sección. (23 Puntos)
- Dibuje el círculo de Mohr para la sección anterior y determine los esfuerzos normales y de corte máximo. (4 puntos)
- Indique el factor de seguridad con el que se está trabajando para el punto B . Considere el criterio de Von Mises. (3 puntos)

Datos: $L = 50\text{cm}$, $d = 20\text{cm}$, $a = 2,5\text{cm}$, $b = 8,9\text{cm}$, $e = 0,35\text{cm}$, $F = 500\text{N}$, $Q = 700\text{N}$, $\sigma_o = 250\text{MPa}$

2. En la Figura 2 tenemos una barra doblada empotrada en A , con un soporte tipo rodillo en C y bajo el efecto de una carga puntual P . Obtener el ángulo de giro en B usando Castigliano. Asuma que E , I y el área de la sección A_{sec} de la barra son constantes. No considere la energía por corte. (25 puntos)

Datos: $E = 200\text{GPa}$, $I = 1 \cdot 10^{-6}\text{m}^4$, $A_{sec} = 4 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$, $L = 50\text{cm}$, $a = 40\text{cm}$, $P = 500\text{N}$.

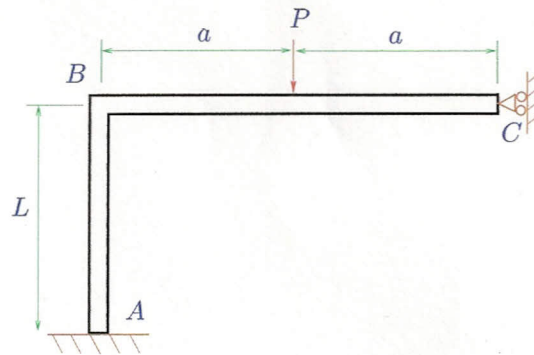


Figura 2: Viga doblada

3. En la Figura 3 se observa un sistema de control que consiste en una barra AB de acero de sección rectangular de lados d y $d/3$, conectada en el punto A por medio de un pasador al brazo CD . Una fuerza F se aplica en el punto D al brazo la que se transmite a la barra AB . ¿Cual es la mayor fuerza F que se puede aplicar sobre el brazo de modo que la barra no falle con un factor de seguridad $FS = 2$? (20 puntos)

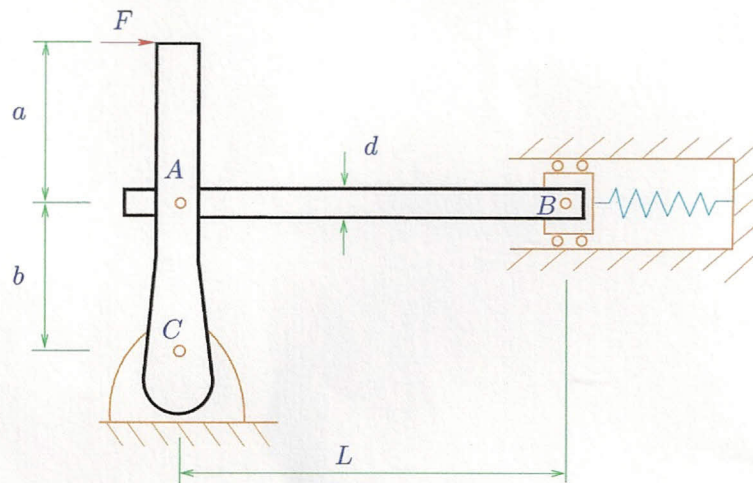


Figura 3: Sistema de control

Datos: $\sigma_0 = 350\text{MPa}$, $E = 190\text{GPa}$, $L = 20\text{cm}$, $b = 8\text{cm}$, $a = 10\text{cm}$, $d = 8\text{mm}$.

Formulario

- Torsión: $T = \frac{\theta GJ}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$. Sección rectangular $T = \frac{\theta GJ}{L}$, $\tau_{max} = \frac{T}{\kappa_1 ab^2}$, $J = \kappa_2 ab^3$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
κ_1	0,208	0,231	0,246	0,282	0,312	1/3
κ_2	0,141	0,296	0,229	0,281	0,312	1/3

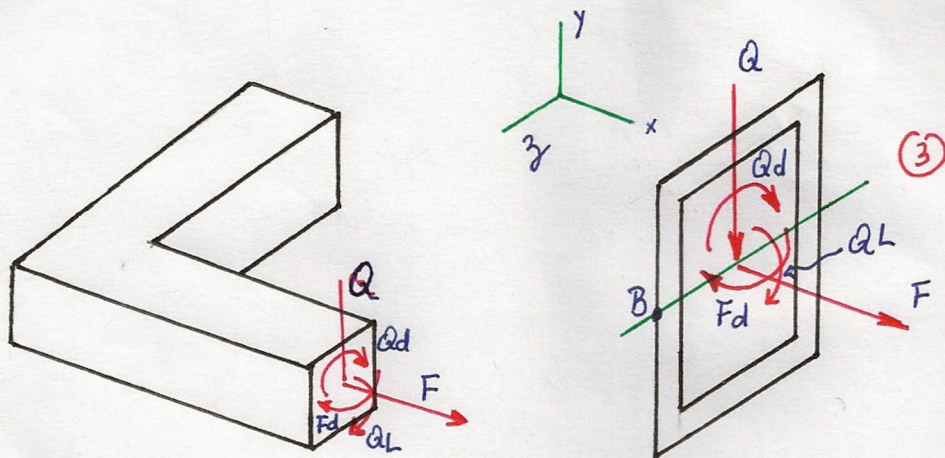
Cuadro 1: Valores para las constantes κ_1 y κ_2 .

Torsión viga pared delgada abierta: $T = \frac{G\theta}{L} \sum_{i=1}^n J_i$. Torsión viga pared delgada cerrada: $T = 2Q\bar{A}$, $\tau = \frac{T}{2At}$.

- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z}y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 dA$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.

1)

① a) . Un extremo empotrado, el otro libre \Rightarrow cargas internas, moven fuerzas



Lista de tipos de esfuerzos en B

- i) $F \hat{x}$ genera esfuerzo normal por carga axial $\sigma_x = \frac{F}{A_{sec}} \leftarrow \text{Área sección}$ (1)
- ii) $-Q \hat{y}$ genera esfuerzo de corte por corte puro τ_{xy} (2)
- iii) $-F_d \hat{y}$ genera esfuerzo normal de compresión por flexión σ_x (1)
- iv) $-Q_L \hat{z}$ generaría esfuerzo normal por flexión, pero este caso B está en el eje neutro $\Rightarrow \sigma_x = 0$ (1)
- v) $-Q_d \hat{z}$ genera esfuerzo de corte por torsión en sección de pared delgada cerrada τ_{xy} (3)

cálculo

$$\text{ii) } A_{sección} = 2.5 * 8.9 - (2.5 - 2 * 0.35) * (8.9 - 2 * 0.35) = 7.49 \text{ cm}^2 \\ = 0.000749 \text{ m}^2$$

$$\sigma_x = \frac{500}{0.000749} = 0.6676 \text{ MPa} \quad (\text{tracción}) \quad (1)$$

(ii)

$$Z = \frac{V}{tI} \int_Y^C \xi dA$$

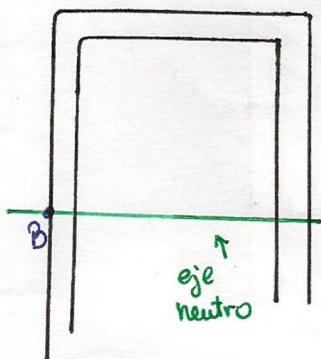
$$V = -Q = -700 \text{ N}$$

$$y = 0 \leftarrow B \text{ en eje neutro}$$

$$t = 2e = 0.7 \text{ cm}$$

$$I = I_y = \frac{ab^3}{12} - (a-2e) \frac{(b-2e)^3}{12}$$

$$= 64.1633 \text{ cm}^4$$



$$Z \rightarrow Z_{xy}$$

$$\int_Y^C \xi dA = \int_0^{b/2} \xi a d\xi - \int_0^{b/2-e} \xi (a-2e) d\xi$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{(a-2e)}{2} \left(\frac{b}{2} - e\right)^2 = 9.624 \text{ cm}^3$$

(2)

$$\Rightarrow Z_{xy} = -149.994 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \sim -1.5 \text{ MPa} \quad (1)$$

(iii)

$$\sigma_x = - \frac{\overbrace{Fd}^M}{\underbrace{I}_{L \rightarrow I_y}} z$$

$$z = \frac{a}{2} \quad I_y = \frac{ba^3}{12} - \frac{(b-2e)(a-2e)^3}{12}$$

$$= 0.0125 \text{ m} \quad = 7.6033 \text{ cm}^4 = 7.6033 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = -16.44 \text{ MPa} \quad (1)$$

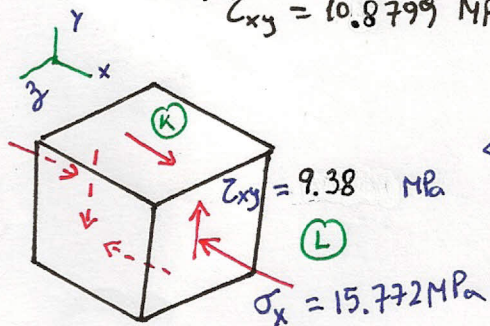
(v)

$$Z = \frac{T}{2\bar{A}t}$$

$$Z \rightarrow Z_{xy} \text{ positivo} \quad T = Qd = 700 \cdot 0.2 \text{ Nm}$$

$$\bar{A} = (a-e)(b-e) = 18.3825 \text{ cm}^2 \quad t = e$$

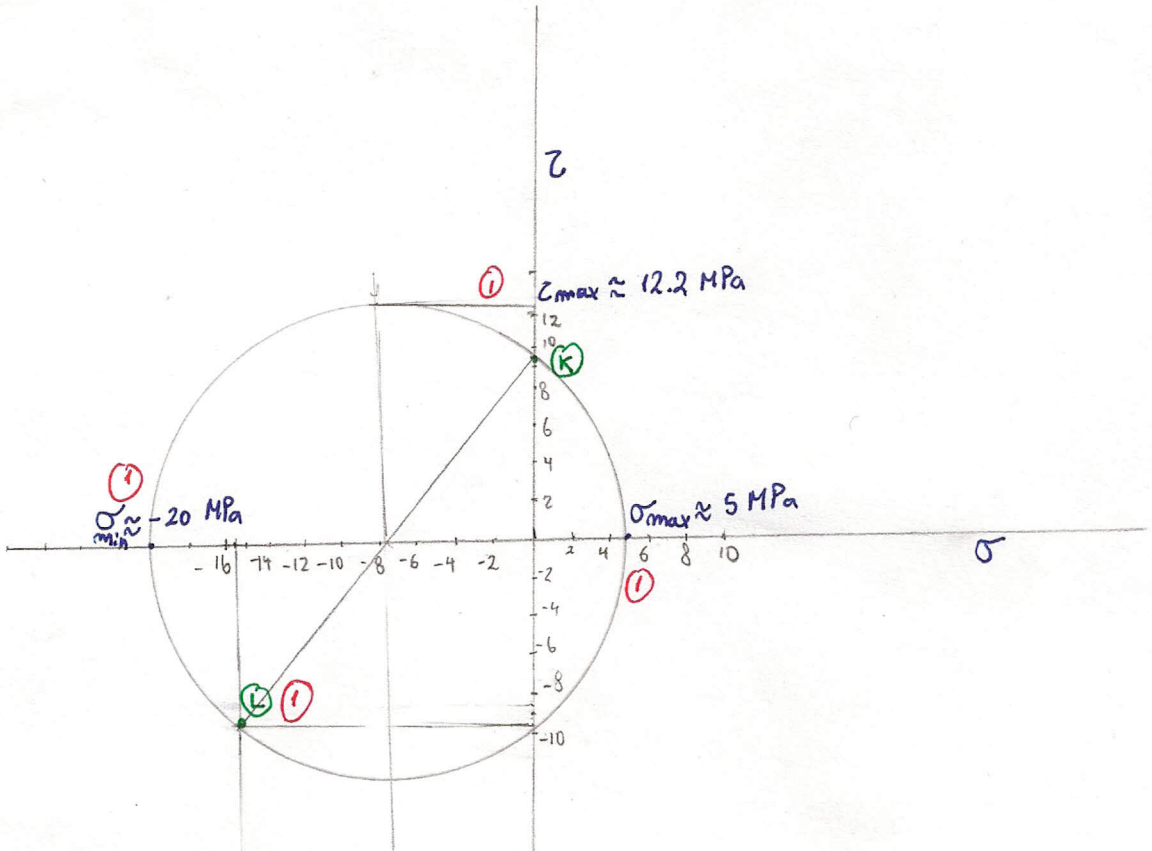
$$\Rightarrow Z_{xy} = 10.8799 \text{ MPa} \quad (4)$$



← estado de esfuerzos

(2)

3) (b)

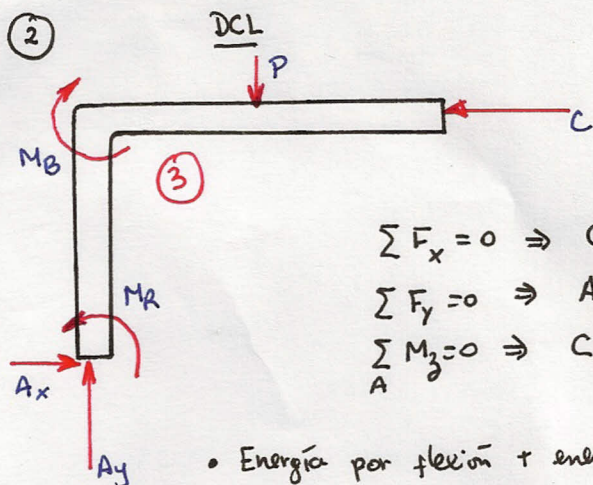


(c) $\sigma_0 = 250$ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_{VM}^2$ $\sigma_1 = 5$ $\sigma_2 = -20$ (1)

$\Rightarrow \sigma_{VM} = 22.913$ MPa

(1)

$\Rightarrow F.S = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}_{VM}} = 10.9$ (1)



M_B se usará para calcular el ángulo en ese punto

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C = A_x$$

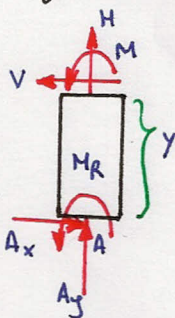
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow CL + M_R = Pa + M_B \Rightarrow M_R = Pa - CL + M_B$$

• Energía por flexión + energía por carga axial

• Cálculo cargas internas y energía interna

• Zona L



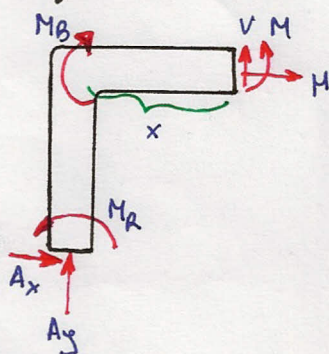
$$H = -A_y = -P$$

$$M(y) = -A_x y - M_R = -Cy - Pa + CL - M_B = C(L - y) - Pa - M_B$$

energía axial $U_{T\text{ axial}} = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{H(y)^2}{A_{\text{sec}}} dy$

energía flexión $U_{Tf} = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M(y)^2}{I} dy$

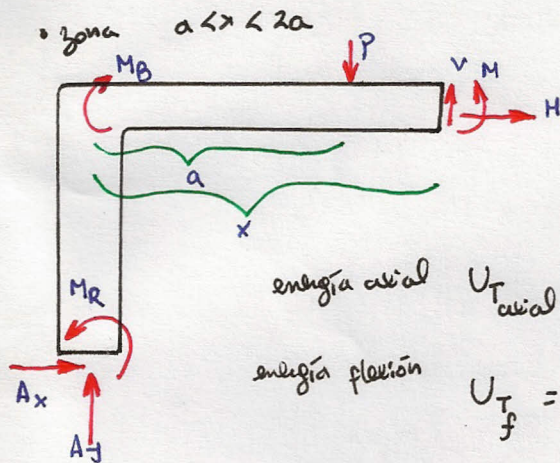
• Zona $0 < x < a$



$$H = -A_x = -C$$

$$M(x) = M_B + A_y x - A_x a - M_R = M_B + Px - CL - Pa + CL - M_B = P(x - a)$$

5]



$$H = -C$$

$$M(x) = P(x-a) - P(x-a) \quad (1)$$

$$= 0$$

energía axial

$$U_{T_{axial}} = \int_0^{2a} \frac{1}{2E} \frac{H(x)^2}{A_{sec}} dx \quad (0.5)$$

energía flexión

$$U_{T_f} = \int_0^a \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I} dx \quad (1)$$

• En C apoyo rodillo $\Rightarrow \delta_C$ desplazamiento horizontal en C 2

$$\delta_C = 0$$

$$\delta_C = \frac{\partial}{\partial C} \left[\int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M(y)^2}{I} dy + \int_0^a \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I} dx + \frac{P^2 L}{2E A_{sec}} + \frac{C^2 2a}{2E A_{sec}} \right]$$

$\uparrow H(y), H(x)$ son constantes

$$= \int_0^L \frac{M(y)}{EI} \frac{\partial M(y)}{\partial C} dy + \int_0^a \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial C} dx + \frac{2aC}{E A_{sec}} \quad (2)$$

pero $\frac{\partial M(y)}{\partial C} = L - y$ $\frac{\partial M(x)}{\partial C} = 0$

$$\Rightarrow \delta_C = \int_0^L \frac{1}{EI} [C(L-y) - Pa - M_B] (L-y) dy + \frac{2aC}{E A_{sec}}$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{C}{3} L^3 - \frac{(Pa + M_B) L^2}{2} \right] + \frac{2aC}{E A_{sec}} = 0 \quad \uparrow \text{ en C}$$

$\Rightarrow C = \frac{(Pa + M_B) L^2}{2 \left(\frac{L^3}{3I} + \frac{2a}{A_{sec}} \right)} \frac{1}{I} \quad (3)$

El ángulo en B se calcula $\theta_B = \left. \frac{\partial U_T}{\partial M_B} \right|_{M_B=0}$

Para U_T solo basta la primera parte de la energía $0 < y < L$

$$\theta_B = \left\{ \frac{\partial}{\partial M_B} \left[\int_0^L \frac{1}{2EI} M(y)^2 dy + \frac{P^2 L}{2EA_{sec}} \right] \right\}_{M_B=0} \quad (2)$$

$$= \left\{ \frac{1}{EI} \int_0^L M(y) \frac{\partial M(y)}{\partial M_B} dy \right\}_{M_B=0}$$

$$\frac{\partial M(y)}{\partial M_B} = \frac{\partial C}{\partial M_B} (L-y) - 1$$

$$\text{de } (*) \quad \frac{\partial C}{\partial M_B} = \frac{L^2}{2 \left(\frac{L^3}{3I} + \frac{2a}{A_{sec}} \right)} \frac{1}{I} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \theta_B = \left\{ \frac{1}{EI} \int_0^L [C(L-y) - Pa - M_B] [\zeta(L-y) - 1] dy \right\}_{M_B=0}$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} L [CL(2L\zeta - 3) - 3(M_B + aP)(L\zeta - 2)] \right\} \quad (3)$$

$$= \frac{aL (144 a^2 I^2 + 12 a A_{sec} I L^3 + A_{sec}^2 L^6) P}{4 EI (6 a I + A_{sec} L^3)^2}$$

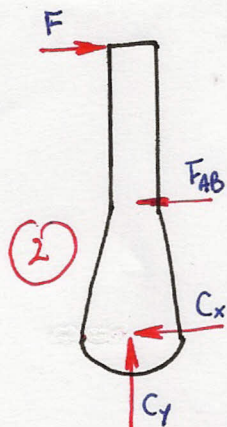
$$= 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

7]

(3)

• Se consideran 3 formas posibles de falla

- Por compresión \rightarrow plasticidad
- Por pandeo en el plano $x-y$, $x-z$

DCL \bar{CA} 

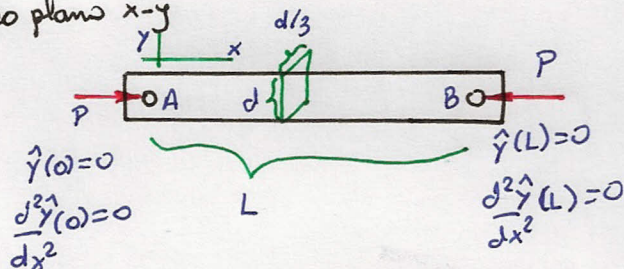
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow F_{AB} b = F(a+b) \Rightarrow F_{AB} = F \frac{(a+b)}{b} \quad (1)$$

• Falla compresión plasticidad

$$\sigma_x = \frac{F_{AB}}{A_{sec}} = \frac{F(a+b)}{b d^2/3} = \frac{\sigma_0}{F.S.} \quad (1)$$

$$\Rightarrow F = \frac{\sigma_0}{F.S.} \frac{b d^2}{3} \frac{1}{(a+b)} = 1659 \text{ N} \quad (2)$$

• Pandeo plano $x-y$



$$\text{de } \hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_3}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_3}} x\right) + C_3 x + C_4$$

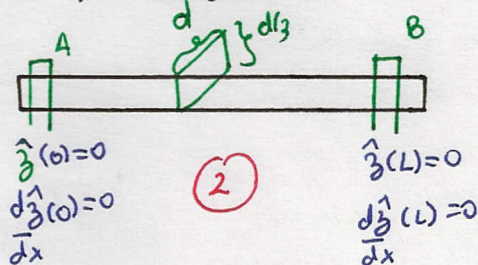
$$\text{se obtiene la condición } \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_3}} L\right) = 0$$

$$\text{luego } \underbrace{F_{AB}}_{\frac{F(a+b)}{b}} = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_3}{F.S.} \quad (1) \quad I_3 = \frac{d}{3} \frac{d^3}{12}$$

$$\Rightarrow F \frac{(a+b)}{b} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{E}{F.S.} \frac{d^4}{36}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{E}{F.S.} \frac{d^4}{36} \frac{b}{(a+b)} = 1185 \text{ N} \quad (2)$$

• Pandeo plano x-z



$$\hat{z}(x) = C_1 \underbrace{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} x\right)}_z + C_2 \cos(\gamma x) + C_3 x + C_4$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{z}}{dx} = C_1 \gamma \cos(\gamma x) - C_2 \gamma \sin(\gamma x) + C_3$$

$$\left. \frac{d\hat{z}}{dx} \right|_0 = 0 \Rightarrow C_1 \gamma + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \gamma$$

$$\hat{z}|_0 = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2$$

$$\left. \frac{d\hat{z}}{dx} \right|_L = 0 \Rightarrow C_1 \gamma \cos(\gamma L) - C_2 \gamma \sin(\gamma L) - C_1 \gamma = 0$$

$$\hat{z}|_L = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\gamma L) + C_2 \cos(\gamma L) - C_1 \gamma L - C_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma \cos(\gamma L) - \gamma & -\gamma \sin(\gamma L) \\ \sin(\gamma L) - \gamma L & \cos(\gamma L) - 1 \end{pmatrix}}_{[D]} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

solución no trivial $\det[D] = 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \cos(\gamma L) - \gamma L \sin(\gamma L) = 0 \quad (1)$$

primera solución

$$\Rightarrow \gamma L = 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_y}} L = 2\pi \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{F(a+b)}{b} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{4\pi^2}{L^2} \frac{EI_y}{F.S} \Rightarrow F = \frac{4\pi^2}{L^2} \frac{EI_y}{F.S(a+b)} b = 526.81 \text{ N}$$

$$I_y = \frac{d \left(\frac{d}{3}\right)^3}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 526.81 \text{ N}} \quad (2)$$