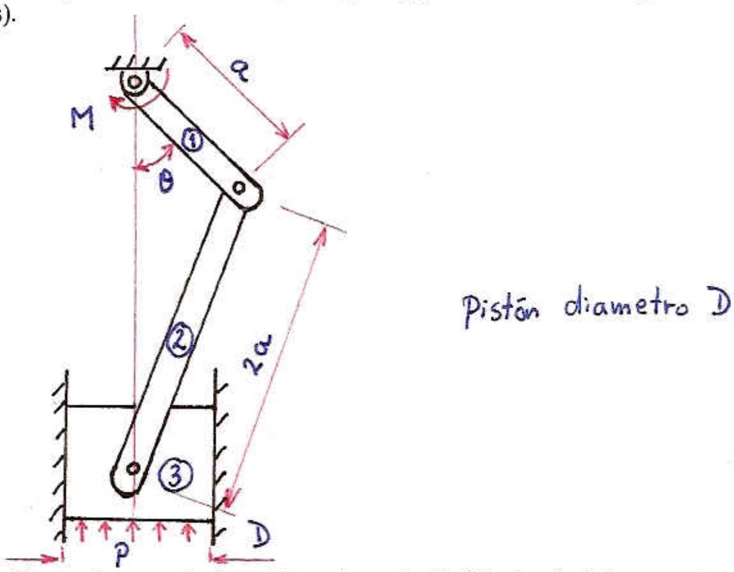
Control 1. Resistencia de Materiales ME 46A-2.

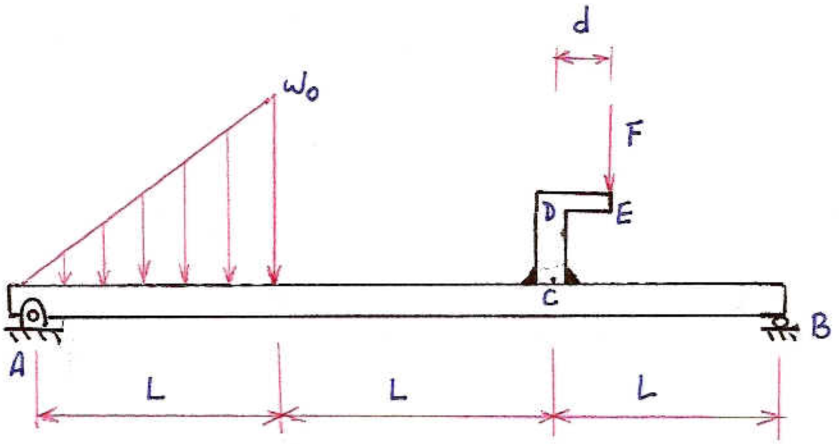
03/09/2008

Profesor: R. Bustamante

1) Calcule el momento M que se debe aplicar a la barra *1* para que el sistema esté en equilibrio. El pistón *3* esta conectado a la barra *2* a través de un pasador, el pistón está sometido a una presión uniforme p. No hay roce entre la superficie exterior del pistón y el agujero cilíndrico en el que se encuentra ubicado (20 puntos).



2) Para la viga AB determine las fuerzas internas horizontales y de corte H, V, además del momento interno M. La barra CDE esta pegada a la viga AB en C. Grafique de manera aproximada V y M (20 puntos).



Datos

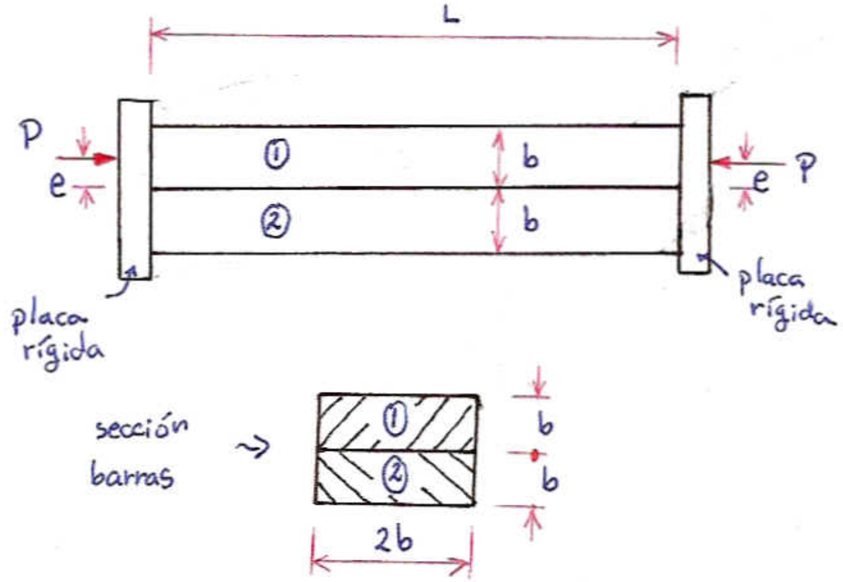
$F = 1000\ N$

$L = 1\ m$

$w_0 = 500\ N/m$

$d = 20\ cm$

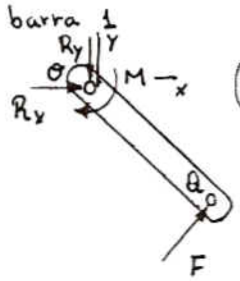
3) Las barras de sección rectangular *1* y *2* están conectadas a dos placas rígidas sobre las cuales se aplica una fuerza ***P***. Las barras tienen distinto modulo de Young, E_1 y E_2 respectivamente. La sección del conjunto se muestra en la figura inferior, las barras tienen las mismas dimensiones (20 puntos):
   a) Calcule la fuerza axial que se produce en cada barra.
   b) Determine la excentricidad ***e*** a la que se debe aplicar ***P*** para que cada barra esté sometida a un esfuerzo axial uniforme. Asuma que $E_1 > E_2$



Pauta Control 1 (1)

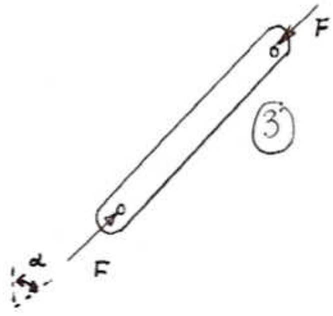
(1) DCL

barra 1



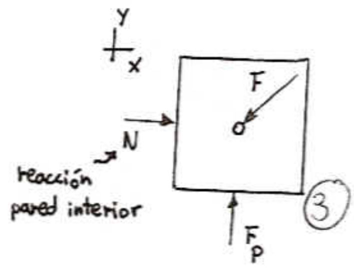
(3)

barra 2



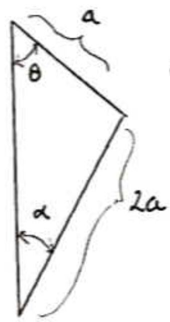
(3)

Pistón



(3)

$F_p = p\underbrace{\frac{\pi D^2}{4}}_{\text{área pistón}}$



$a \operatorname{sen}\theta = 2a \operatorname{sen}\alpha$

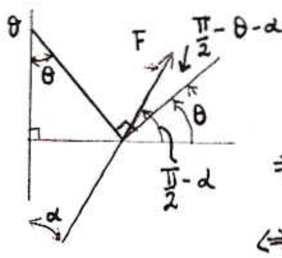
$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arsen}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$ (2)

(2) $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_p - F\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow F = \dfrac{F_p}{\cos\alpha}$

barra 1 $\sum_{\theta} M_z = 0$

(i) 1^er^ método



$\Rightarrow$ momento de F respecto a θ igual a $aF\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)}_{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}$ ↺ (3)

$\Rightarrow \sum_{\theta} M_z = 0$ (2)

$\Leftrightarrow \quad aF\operatorname{sen}(\theta+\alpha) - M = 0$

$\Rightarrow M = aF\operatorname{sen}(\theta+\alpha)$

$= aF_p \dfrac{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}{\cos\alpha}$

$= a p \pi D^2 \dfrac{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}{4\cos\alpha}$ (2)

(ii) 2^do^ método (vectorial)

$\Rightarrow \vec{\rho}_{0a} = a\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} - a\cos\theta\,\hat{\jmath} \qquad \vec{F} = F\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\imath} + F\cos\alpha\,\hat{\jmath}$

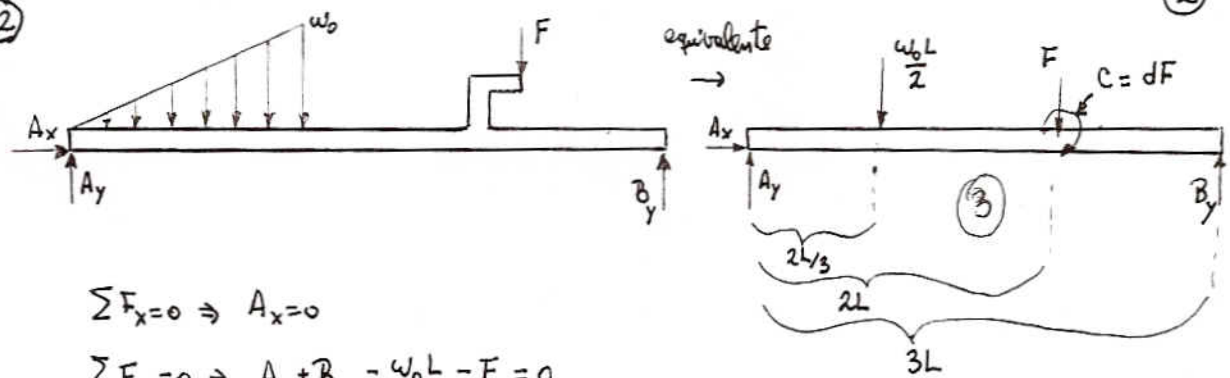
$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{momento causado} \\ \text{por F}}}{\vec{M}_F} = \vec{\rho}_{0a} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a\operatorname{sen}\theta & -a\cos\theta & 0 \\ F\operatorname{sen}\alpha & F\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = aF\hat{k}\,(\underbrace{\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta}_{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)})$$

$\Rightarrow \quad M_F = aF\operatorname{sen}(\theta+\alpha)$ ↺

$\Rightarrow \sum_{\theta} M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad aF\operatorname{sen}(\theta+\alpha) - M = 0$

$\Rightarrow \quad M = a p \pi D^2 \dfrac{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}{4\cos\alpha}$

(2)



$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - w_0 \frac{L}{2} - F = 0$

$\Rightarrow A_y + B_y = w_0 \frac{L}{2} + F$ (1)

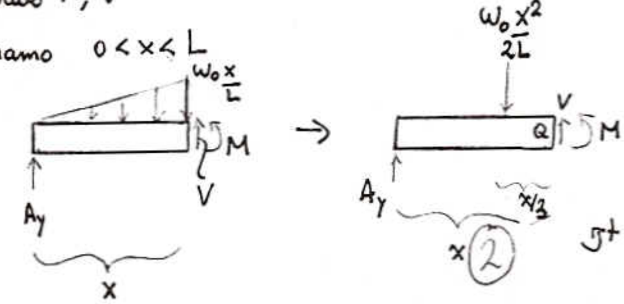
$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow B_y\, 3L - F\, 2L - w_0 \frac{L}{2} \frac{2L}{3} - \underbrace{dF}_{C} = 0$

$\Rightarrow B_y = \frac{1}{3L} \left(2LF + \frac{w_0 L^2}{3} + dF \right)$

$\Rightarrow B_y = 788{,}89$ N (1) $\Rightarrow A_y = 461{,}11$ N (1)

Cálculo M, V

tramo $0 < x < L$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + A_y - \frac{w_0 x^2}{2L} = 0$

$\Rightarrow V = \frac{w_0 x^2}{2L} - A_y$

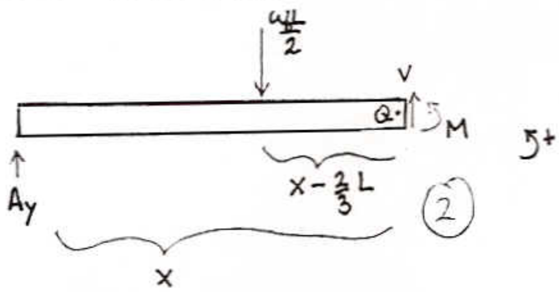
$V = 250 x^2 - 461{,}4$ (1)

$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow M + \frac{w_0 x^2}{2L} \cdot \frac{x}{3} - A_y x = 0$

$\Rightarrow M = A_y x - \frac{w_0 x^3}{6L}$

$M = 461{,}11 x - 83{,}33 x^3$ (1)

tramo $L < x < 2L$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + A_y - \frac{w_0 L}{2} = 0$

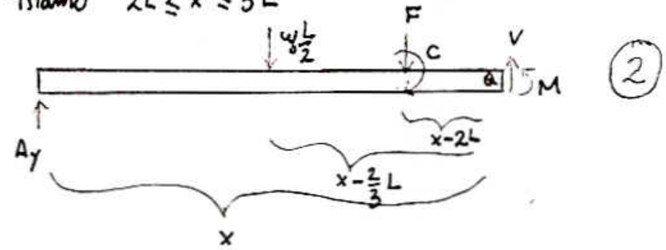
$\Rightarrow V = \frac{w_0 L}{2} - A_y = -211{,}11$ (1)

$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow M - A_y x + \frac{w_0 L}{2}\left(x - \frac{2}{3}L\right) = 0$

$M = \left(A_y - \frac{L}{2} w_0\right) x + w_0 \frac{L^2}{3}$

$M = 211{,}11 x + 166{,}67$ (1)

tramo $2L \leq x \leq 3L$



(2)

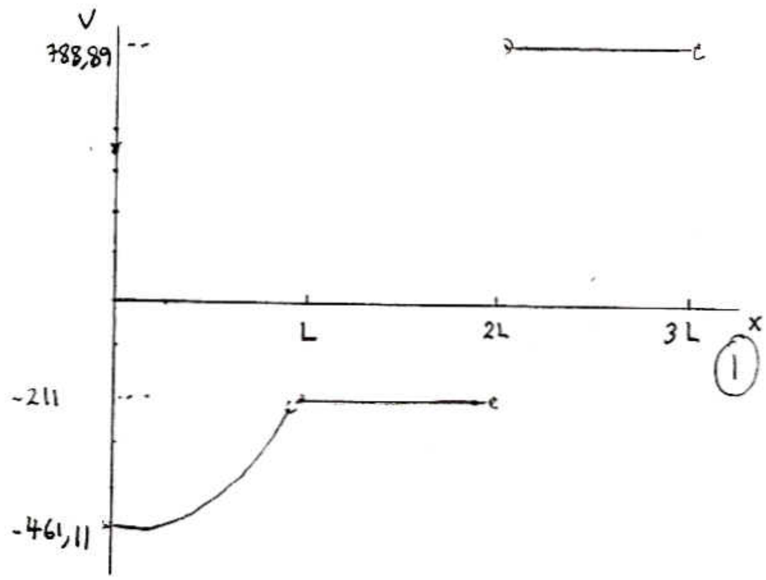
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + A_y - \frac{w_0 L}{2} - F = 0 \quad \Rightarrow V = \frac{w_0 L}{2} + F - A_y = 788{,}89$$ (1)

$$\sum_a M_z = 0 \Rightarrow M + w_0\frac{L}{2}\left(x - \frac{2}{3}L\right) + F(x-2L) - A_y x - \underbrace{C}_{Fd} = 0$$

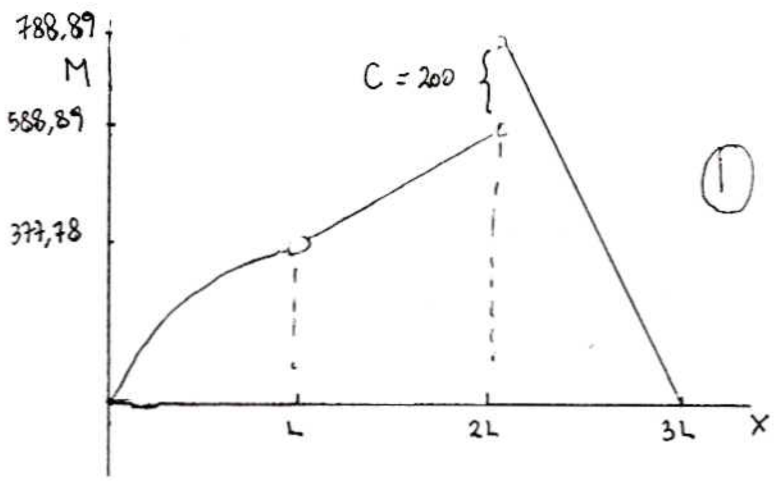
$$\Rightarrow M = \left(A_y - F - w_0\frac{L}{2}\right)x + Fd + w_0\frac{L^2}{3} + 2FL$$

$$\Rightarrow M = -788{,}89\,x + 2366{,}67$$

$$\Rightarrow M(x=3L) = 0 \quad ✓$$ (1)

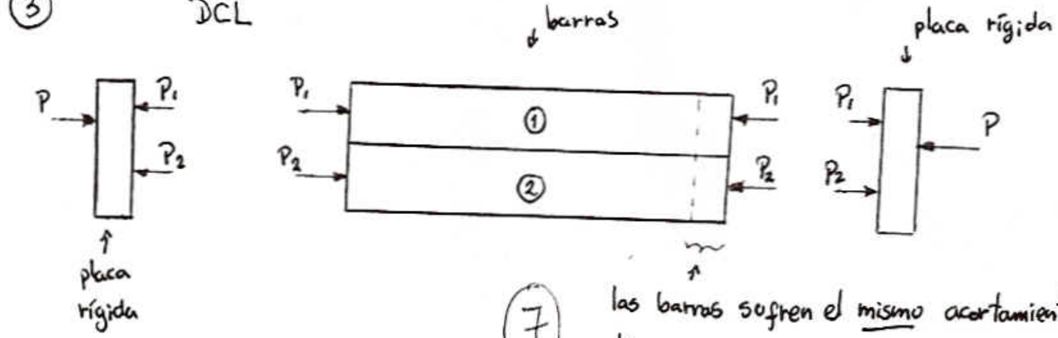


(1)



(1)

(3) DCL



(7) las barras sufren el <u>mismo</u> acortamiento $\Rightarrow$ misma deformación, como modulos de Young son diferentes de la ley de Hooke las reacciones que generan las barras son distintas

$\underset{x}{\overset{y}{+}}$ $\uparrow$

$\sum F_x = 0$

$\Rightarrow \underbrace{P = P_1 + P_2}$ (1)

barras $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ pero $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P_1}{E_1 \underbrace{A_{rea}}_{2b^2}}$

$\Rightarrow P_1 = \varepsilon E_1 2b^2$ (2)

y $P_2 = \varepsilon E_2 2b^2$ (2)

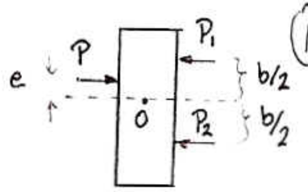
$\Rightarrow P = \varepsilon 2b^2 (E_1 + E_2)$

$\Rightarrow \varepsilon = \dfrac{P}{2b^2(E_1+E_2)}$ (1) $\Rightarrow P_1 = \dfrac{P E_1}{E_1 + E_2}$ (1) y $P_2 = \dfrac{P E_2}{E_1 + E_2}$ (1)

$\mapsto$ La placa rígida $\underbrace{\text{no puede rotar}}$. Nótese que si $E_1 > E_2 \Rightarrow P_1 > P_2$

$\Downarrow$

esfuerzos axiales uniformes



(1) $\sum_O M_z = 0 \Rightarrow P_1 \, b/2 - P_2 \, b/2 - P e = 0$ (2)

$\circlearrowleft +$ $\Rightarrow e = \dfrac{b}{2P} \underbrace{(P_1 - P_2)}$

positivo dado que $P_1 > P_2$

$\Rightarrow e = \dfrac{b}{2\cancel{P}} \dfrac{\cancel{P}}{(E_1 + E_2)} (E_1 - E_2)$

$\Rightarrow e = \dfrac{b}{2} \dfrac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)}$ (2)

nótese que si $E_1 = E_2 \Rightarrow e = 0$