Control 1, Resistencia de Materiales ME3202
1er semestre 2011

Profesor: R. Bustamante

1. El bastidor de la Figura 1 se usa para soportar cables de alta tensión (en C, F e I tenemos un peso W por los cables). ¿Qué valor tiene la fuerza axial en el elemento HJ? (20 puntos)

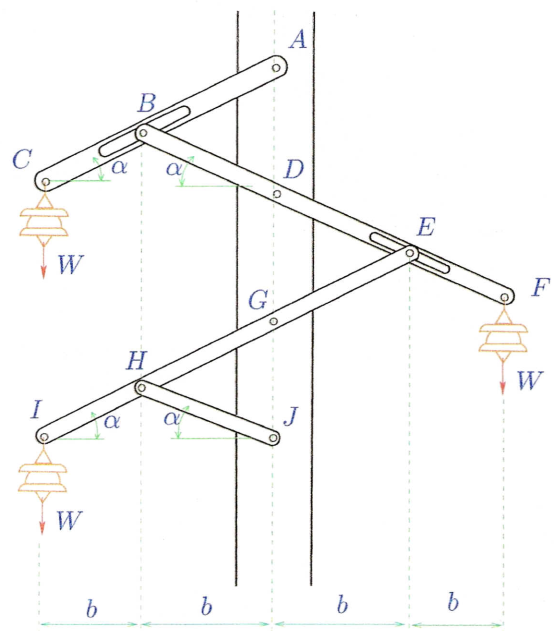


Figura 1: Bastidor

Datos: $b = 1\text{m}$, $\alpha = 30°$, $W = 1000\text{Kgf}$.

2. Para la viga mostrada en la Figura 2 calcular las cargas internas y expresarlas en términos de s que es la distancia a lo largo de toda la viga. (20 puntos)

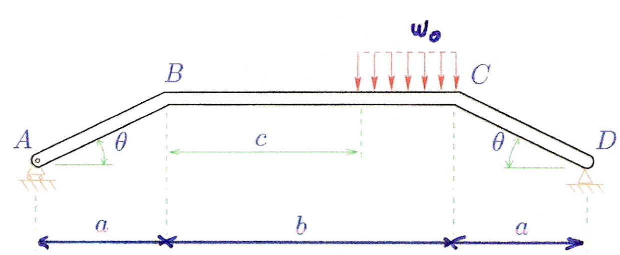


Figura 2: Viga bajo el efecto de fuerza uniforme

Datos: $w_o = 1000\text{N/m}$, $a = 1\text{m}$, $b = 3\text{m}$, $c = 2\text{m}$, $\theta = 30°$.

3. La barra rígida $ABCD$ de peso W de la Figura 3 está suspendida por tres alambres de acero de módulo de elasticidad E. Cada alambre tiene un diámetro d. Determine los esfuerzos producidos en cada uno de los alambres. (20 puntos)

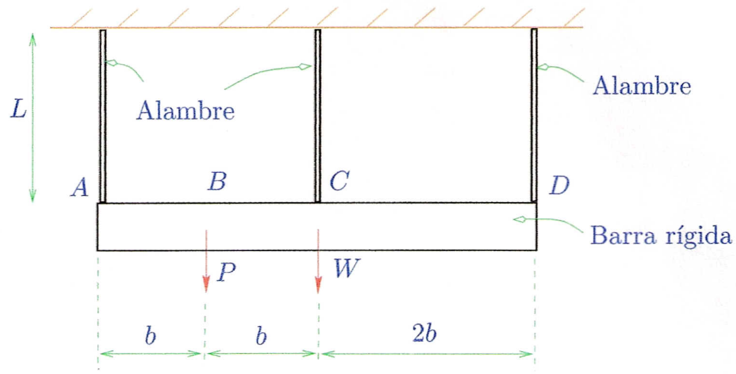
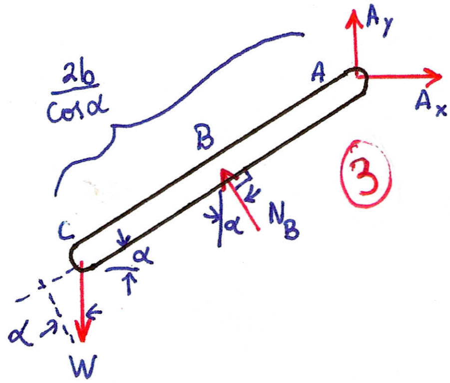


Figura 3: Barra sostenida por tres alambres

Datos: $W = 10000\text{N}$, $P = 5000\text{N}$, $d = 0.5\text{cm}$, $L = 1\text{m}$, $b = 50\text{cm}$, $E = 190\text{GPa}$

Pauta Control 1

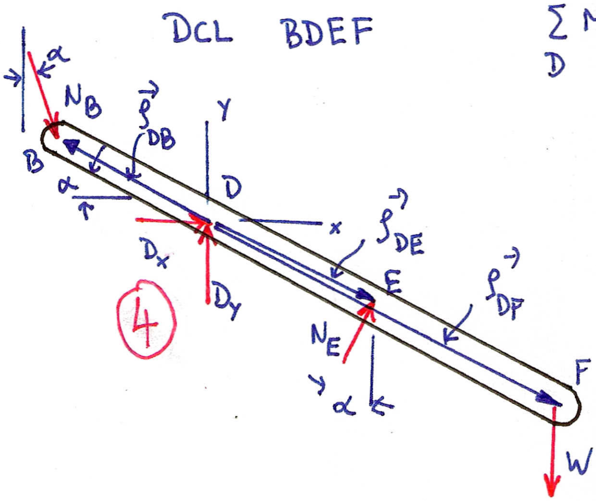
(1) DCL CBA



$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow W\cos\alpha \, \frac{2b}{\cos\alpha} = N_B \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow N_B = 2W\cos\alpha = 1732 \text{ kgf} \quad (1)$$

DCL BDEF



$$\sum_D M_z = 0 \Rightarrow \vec{\rho}_{DE} \times \vec{N}_E + \vec{\rho}_{DF} \times \vec{W}$$

$$(1) \quad + \vec{\rho}_{DB} \times \vec{N}_B = \vec{0} \quad (*)$$

Pero

$$\vec{\rho}_{DE} \times \vec{N}_E = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b & -b\tan\alpha & 0 \\ N_E \operatorname{sen}\alpha & N_E\cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}\left(bN_E\cos\alpha + bN_E \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \right)$$

(0.5)

$$\vec{\rho}_{DF} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2b & -2b\tan\alpha & 0 \\ 0 & -W & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(-2bW)$$

$$\vec{\rho}_{DB} \times \vec{N}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -b & b\tan\alpha & 0 \\ N_B \operatorname{sen}\alpha & -N_B\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(bN_B\cos\alpha - bN_B \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \right)$$

Luego en ⊛ tenemos

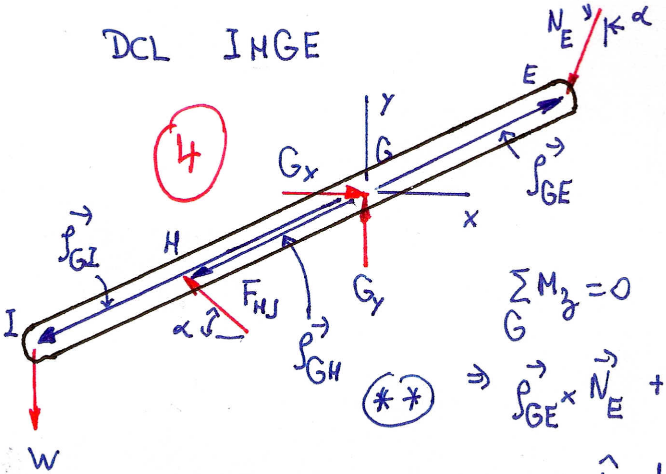
$$\cancel{b} N_E \left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \right) - 2\cancel{b} W + \cancel{b} N_B \left(\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow N_E = \frac{2W - N_B\left(\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = 866 \text{ kgf}$$

2

DCL IHGE

4



1

$$\sum_G M_z = 0$$

(**) $\Rightarrow \vec{\rho}_{GE} \times \vec{N}_E + \vec{\rho}_{GH} \times \vec{F}_{HJ} + \vec{\rho}_{GI} \times \vec{W} = \vec{0}$

Pero
$$\vec{\rho}_{GE} \times \vec{N}_E = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b & b\tan\alpha & 0 \\ -N_E \sin\alpha & -N_E \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(-bN_E\cos\alpha + bN_E\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\vec{\rho}_{GH} \times \vec{F}_{HJ} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -b & -b\tan\alpha & 0 \\ -F_{HJ}\cos\alpha & F_{HJ}\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(-bF_{HJ}\sin\alpha - bF_{HJ}\sin\alpha\right)$$

0.5

$$\vec{\rho}_{GI} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2b & -2b\tan\alpha & 0 \\ 0 & -W & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\; 2bW$$

3]

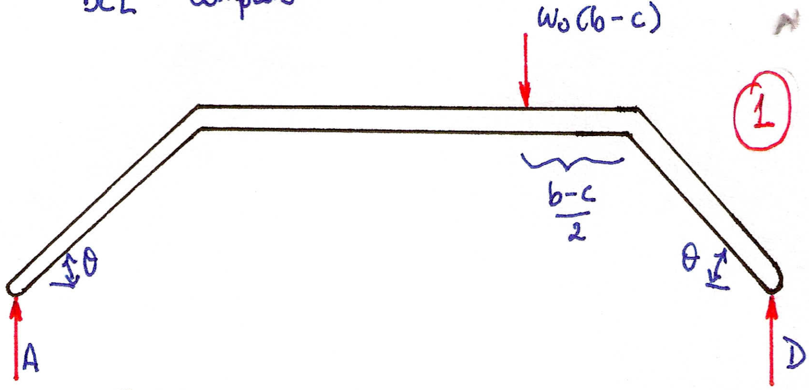
reemplazando en (**)

$$b\, N_E \left(-\cos\alpha + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}\right) - 2\cancel{b}\, F_{HJ}\, \text{sen}\,\alpha + 2\cancel{b}\, W = 0$$

$$\Rightarrow F_{HJ} = \frac{W}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{N_E}{2\,\text{sen}\,\alpha}\left(-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right) \approx 1000 \text{ kgf}$$

3

2 DCL Completo



1

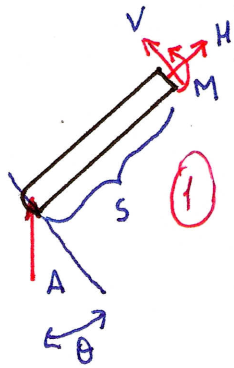
$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow \quad D(2a+b) = w_0(b-c)\left(a+b-\frac{(b-c)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow D = 700 \text{ N}$$ 1

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad A + D = w_0(b-c) \Rightarrow A = 300 \text{ N}$$ 1

s : coordenada que parte en A y sigue la forma de la viga

- $0 < s < \frac{a}{\cos\theta}$ 1



1

$$H = -A\,\text{sen}\,\theta = -150 \text{ N}$$

$$V = -A\cos\theta = -259.8 \text{ N}$$ 1

$$M = A\cos\theta\, s = 259.8\, s \quad \text{Nm}$$

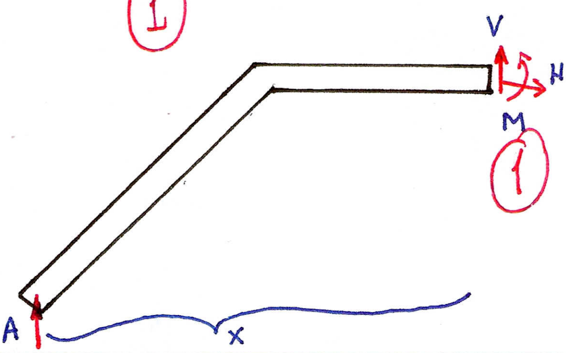
- $\frac{a}{\cos\theta} < s < \frac{a}{\cos\theta} + c$ 1

$$x = s - \frac{a}{\cos\theta} + a$$ 1

$$H = 0 \qquad V = -A = -300 \text{ N}$$

$$M = A x$$

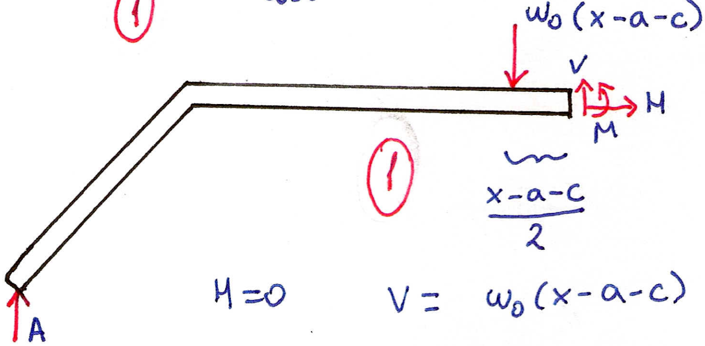
$$= 300\left(s - \frac{a}{\cos\theta} + a\right) \quad \text{Nm}$$ 1



1

5

- $\dfrac{a}{\cos\theta} + c < s < \dfrac{a}{\cos\theta} + b$ 1 $\qquad x = s - \dfrac{a}{\cos\theta} + a$ 1



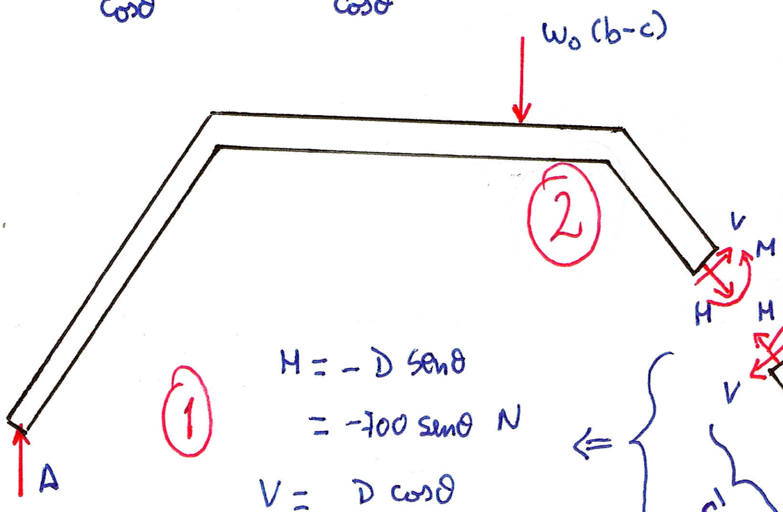
$H = 0 \qquad V = w_0(x-a-c) - A$ 1

$$= 1000\left(s - \frac{a}{\cos\theta} - c\right) - 300 \quad N$$

$$M = Ax - \frac{w_0}{2}(x-a-c)^2$$

$$= 300\left(s - \frac{a}{\cos\theta} + a\right) - 500\left(s - \frac{a}{\cos\theta} - c\right)^2 \quad Nm$$ 1

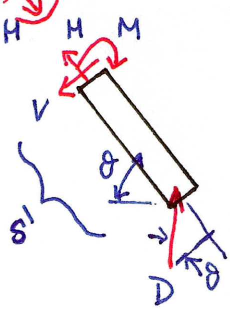
- $\dfrac{a}{\cos\theta} + b < s < \dfrac{2a}{\cos\theta} + b$ 1



coordenada auxiliar

↓

$s' = \dfrac{2a}{\cos\theta} + b - s$



1 $\quad H = -D\,\text{sen}\,\theta$

$= -700\,\text{sen}\,\theta \quad N$

$V = D\cos\theta$

$= 700\cos\theta \quad N$

1 $\quad M = D\cos\theta\; s'$

$$= 700\cos\theta\left(\frac{2a}{\cos\theta} + b - s\right) \quad Nm$$

3 • Por efecto del peso W la barra rígida ABCD baja, como los alambres tienen la misma longitud inicial y módulo de elasticidad ⇒ baja lo mismo en A, C y D

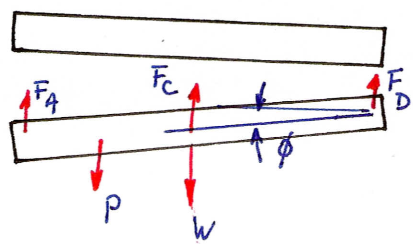
• Por efecto de P la barra rígida además "rota" respecto a D

DCL Barra ABCD

ϕ : ángulo rotación

ε : deformación por peso W 1

ε_A, ε_C, ε_D : deformación en A, C, D

2 

tenemos

$\varepsilon_D = \varepsilon$ 1 $\qquad \underbrace{\varepsilon_A = \varepsilon + \frac{\delta_A}{L} \quad (2) \qquad \varepsilon_C = \varepsilon + \frac{\delta_C}{L} \quad (2)}$

1 $F_A = A\sigma_A \qquad F_C = A\sigma_C \qquad F_D = A\sigma_D$ $\quad \Leftarrow$ δ_A, δ_C desplazamientos en A y C por rotación en A, C

$A = \frac{\pi d^2}{4}$ área sección

Pero $\sigma_A = E\varepsilon_A \qquad \sigma_C = E\varepsilon_C \qquad \sigma_D = E\varepsilon_D$ 1

$\Rightarrow F_A = AE\left(\varepsilon + \frac{\delta_A}{L}\right)$ 1 $\quad$ 1 $F_C = AE\left(\varepsilon + \frac{\delta_C}{L}\right)$ 1 $F_D = AE\varepsilon$

Pero de la figura tenemos $\delta_A \approx \underbrace{4b\phi}_{\text{arco = ángulo * radio}}$ 1 $\qquad \delta_C \approx 2b\phi$ 1

$\Rightarrow F_A = AE\left(\varepsilon + \frac{4b}{L}\phi\right) \qquad F_C = AE\left(\varepsilon + \frac{2b}{L}\phi\right) \qquad F_D = AE\varepsilon$ 1

7) Equilibrio para barra rígida

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad F_A + F_C + F_D = P + W$

$\Updownarrow$

$AE\left(\varepsilon + \frac{4b}{L}\phi\right) + AE\left(\varepsilon + \frac{2b}{L}\phi\right) + AE\,\varepsilon = P + W$

$\Updownarrow$

$$3\varepsilon + \frac{6b}{L}\phi = \frac{P+W}{AE} \quad (*) \quad 2$$

$\sum_D M_z = 0 \Rightarrow \quad 4b F_A + 2b F_C = 3bP + 2bW$

$4\,AE\left(\varepsilon + \frac{4b}{L}\phi\right) + 2\,AE\left(\varepsilon + \frac{2b}{L}\phi\right) = 3P + 2W$

$\Updownarrow$

$$6\varepsilon + 20\frac{b}{L}\phi = \frac{3P+2W}{AE} \quad (**) \quad 2$$

Resolviendo $(*)$ y $(**)$ se obtiene

$\varepsilon \approx 0.001 \qquad \phi \approx 0.000335$ rad

$\Rightarrow \sigma_A \approx 317.3$ MPa $\quad \sigma_C \approx 253.65$ MPa $\quad \sigma_D \approx 190$ MPa