MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escribas: Manuel Cáceres, Felipe Garrido, Camila Romero, Sebastián Tapia.
Fecha: 14 de Noviembre 2014 .

Cátedra 26

1. Recuerdo

En la clase pasada se mencionó que se podía resolver el problema de Matching Perfecto en grafos generales, escribiendo este como un problema de programación lineal y prosiguiendo con el *Método de la elipsoide* [1].

Para esto se definieron los siguientes conjuntos :

$$P_{Matching\ perfecto}(G) = conv(\chi^M :\ M\ es\ Matching). \tag{1}$$

$$\begin{aligned} Q(G) = \{\ x \in \mathbb{R}^E : \ & x(\delta(v)) = 1,\ \forall v \in V, \\ & x(\delta(S)) \geq 1,\ \forall S \subseteq V : |S| \text{ impar}, \\ & x \geq 0\ \}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Teorema de Edmonds

Teorema 1 (Teorema de Edmonds)**.**

$$P(G) = Q(G)$$

Demostración. Inducción en $n + m = |E| + |V|$:

__**Caso base:**__ $(n + m = 1)$ Se tiene que $n = 1$ y $m = 0$, por lo tanto $P(G) = Q(G) = \emptyset$.

__**Caso general:**__ $(n + m \geq 2)$

En este caso podemos suponer además que n es par, pues si no lo fuese, no existiría un Matching perfecto en G, por lo que $P = \emptyset$ y podríamos tomar $S = V$ tal que $x(\delta(V)) = 0$, por lo que Q sería vacío también. La inclusión $P \subseteq Q$ es directa pues claramente un vértice de P cumple las condiciones para estar en Q, por lo que nos dedicaremos a demostrar la otra inclusión $(Q \subseteq P)$.

Sea x^* un vértice (punto extremo) de Q y dividamos la demostración en los siguientes casos :

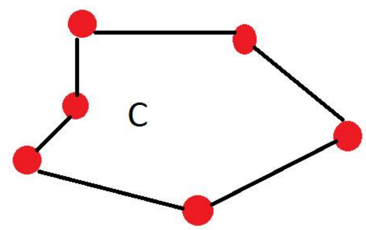
1) Existe e tal que $x^*_e = 0$.
En este caso, se tiene que $x^*|_{E-e} \in Q(G - e) = P(G - e)$ por hipótesis inductiva, es decir, $x^*|_{E-e}$ es combinación convexa de indicatrices de matchings perfectos en $G - e$, y por lo tanto en G. Luego, $x^* \in P(G)$.

2) Existe e con $x^*_e = 1$,
Análogamente a la parte anterior, tomando $G-v-u$, (donde $e = uv$) se puede demostrar que $x^* \in P(G)$.

3) Para todo $e \in E,\ x^*_e \in (0, 1)$,
Como $x^*(\delta(v)) = 1$, se cumple que $\forall v \in V :\ d_G(v) \geq 2$ [2]. Dividamos ahora nuevamente en casos :

[1] Teniendo así un algoritmo polinomial para el problema
[2] Para que la suma de los del corte de 1, tienen que haber al menos 2 aristas.

i) Para todo $v \in V:\ d_G(v) = 2$.
Sabemos que G sería unión disjunta de ciclos y además, el número de vértices de cada ciclo debe ser par[3].
Sea C un ciclo de estos,



se cumple entonces que $\exists \alpha \in (0,1)$, tal que :

$$x_e^* = \begin{cases} \alpha & \text{para las aristas pares,} \\ 1-\alpha & \text{para las aristas impares} \end{cases}$$

pues $x^*(\delta(v)) = 1$, en particular $\forall v \in C$.

Definimos ahora :

x^+ : el vector obtenido al sumar ϵ a las aristas pares, y restar ϵ a las aristas impares

x^- : el vector obtenido al restar ϵ a las aristas pares, y sumar ϵ a las aristas impares

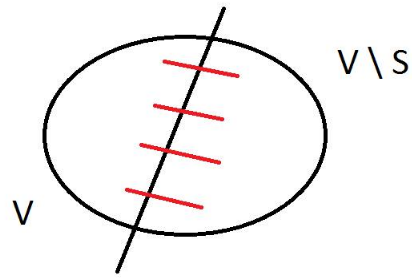
eligiendo ϵ suficientemente pequeño como para que $x^+, x^- \in Q$.
Notando que $x^* = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$, contradecimos que x^* es punto extremo de Q.

ii) Existe $v^* \in V:\ d_G \geq 3$. Luego,

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v) > |V| \quad ^4$$

Ahora, como sabemos $x^* \in Q$ es extremo y Q tiene dimensión $|E|$, entonces se tendrán $|E|$ desigualdades ajustadas l.i. que definen a x^*
Por otro lado, se tiene $x_e^* > 0 : \forall e \in E$, y hay solo $|V| < |E|$ condiciones del tipo $x(\delta(v)) = 1$, por lo que se concluye que al menos una de las condiciones $x^*(\delta(S)) \geq 1$ está "activa" y es l.i. con respecto a las anteriores, es decir, existe S con $|S|$ impar y tal que $x^*(\delta(S)) = 1$, $|S| \neq 1$[5] y $|S| \neq n-1$[6].
Tenemos

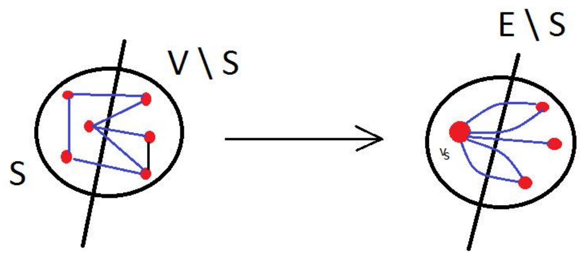
[3]Si no lo fuese, no se cumpliría la condicion $x^*(\delta(C)) \geq 1$, *con* $|C|$ *impar*
[4]Esto pues $\forall v \in V - v^*\ d(v) \geq 2$ y $d(v^*) \geq 3$
[5]si no, esta desigualdad se deduciría de $x^*(\delta(v))$, con $S = \{v\}$ y no sería l.i.
[6]si no, esta desigualdad se deduciría de $x^*(\delta(S)) = x^*(\delta(v))$, *con* $v \notin S$ y no sería l.i.



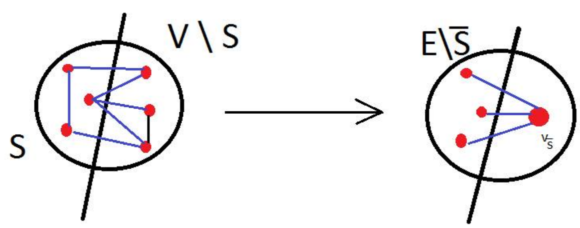
donde las líneas rojas corresponden al corte de V y $V \setminus S$.

Sea $\bar{S} = V \setminus S$. Definimos los multigrafos: G/S y $G/\bar{S}$, como los obtenidos al fusionar las aristas de S y $\bar{S}$ en los vértices v_S y $v_{\bar{S}}$ respectivamente, y eliminando los loops generados en v_S y $v_{\bar{S}}$ al fusionar.

Grafo $E \setminus S$



Grafo $E \setminus \bar{S}$



Definimos además :

- $x' \in \mathbb{R}^{E(G/S)}$,
- $x'' \in \mathbb{R}^{E(G/\bar{S})}$,

como las restricciones de x^* a las aristas que no fueron borradas.

Observación 1. *Notar que $x' \in Q(G/S)$, pues :*

$$x' \geq 0$$

$$x'(\delta_{G/S}(v)) = \begin{cases} x^*(\delta(v)) = 1 & \forall v \in V \setminus S \\ x^*(\delta(S)) = 1 & si\ v = v_S \end{cases}$$

$$\forall T :\ |T| \quad es\ impar \quad x'(\delta_{G/S}(T)) = x^*(\delta_G(T_{expandido}))$$

y lo mismo para x'', es decir, $x'' \in Q(G/\bar{S})$

Como G/S y $G/\bar{S}$ tienen menos vértices y aristas que G, usamos inducción y obtenemos que

$$x' \in P(G/S) \qquad\qquad x'' \in P(G/\bar{S})$$
$$x' = \sum_{M'} \lambda_{M'} \chi^{M'} \qquad\qquad x'' = \sum_{M''} \lambda_{M''} \chi^{M''}$$

, es decir, combinación convexa de indicatrices de matchings perfectos en G/S y $G/\bar{S}$ respectivamente.

Recordando que x^* es un vértice de Q, el cual es un polítopo racional.
$\Rightarrow x^*$ tiene coordenadas racionales
$\Rightarrow x'$ *y* x'' tienen coordenadas racionales[7]

Abusando un poco de notación, podemos escribir:[8]

$$x' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi^{M_i'} \qquad\qquad x'' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi^{M_i''}$$

Más aún, como $1 = x'|_{\delta(S)} = x''|_{\delta(S)} = x^*|_{\delta(S)}$, podemos crear los matchings de modo que $\forall i$, las únicas aristas de M_i' *y* M_i'' que cruzan el corte son las mismas.

Haciendo esto, podemos definir $M_i = M_i' \cup M_i''$, matching perfecto de G, luego

$$x^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi^{M_i}, \quad ^{9}$$

y así $x^* \in P$.

$\blacksquare$

Observación 2. *Como consecuencia del resultado anterior, si tenemos un oráculo de separación polinomial para:*

$$P_{Matching\ perfecto} = \{x \in \mathbb{R}^E |\ x(S(v))) = 1,\ x(\delta(S)) \geq 1,\ x \geq 0,\ \forall\ S \subseteq V\ impar\},$$

podemos usar el método elipsoidal para encontrar un vértice óptimo del PL:

$$max\{w^t x; x \in \chi^M : M\ matching\ perfecto\}.$$

A modo general, muchos problemas de optimización combinatorial se pueden describir definiendo los siguientes 3 objetos:

1) Conjunto de instancias donde nuestro problema cobra sentido, el cual se puede denotar por I. Por ejemplo durante el curso hemos usado $I = \{\text{Grafos}\}$, entre otros.

2) Conjunto de objetos factibles de interés, esto es, para cada $G \in I$ considerar un conjunto $\mathbb{F}(G)$ en el cual resolveremos el problema. Por ejemplo si I son grafos, podemos pensar en $\mathbb{F}(G)$ como el conjunto de matchings perfectos o el conjunto de bosques generadores, entre otro.

[7] De hecho los $\lambda_{M'}, \lambda_{M''}$ también
[8] Permitiendo repeticiones en los M_i' y en los M_i''

3) Función de peso $\omega_G : \mathbb{F}(G) \to \mathbb{Q}$, en el cual se basará la optimización del problema. Por ejemplo dada una instancia G en I, encontrar el objeto factible que maximiza el peso.

Una estrategia para resolver estos tipos de problemas cuando ω_G es una función "lineal"de los elementos de cada objeto factible es escribir el problema como:

Dado G:

$$w^T x \mid x = \chi^F,\ F \in \mathbb{F}(G),$$

es lo mismo que resolver

$$\text{máx}\{w^T x \mid x \in \text{conv}(\chi^F \mid F \in \mathbb{F}(G))\},$$

dado esto, si además podemos describir de manera eficiente el conjunto $\text{conv}(\chi^F \mid F \in \mathbb{F}(G))$ mediante un oráculo de separación polinomial, podríamos resolver usando el método de la elipsoide.

3. Clases de complejidad para problemas de Optimización Combinatorial.

Definiremos de manera informal dos clases de problemas.

1) Clase $\mathcal{P}$: Problemas tales que para todas las instancias G de I, podemos determinar en tiempo polinomial si $\exists F \in \mathbb{F}(G)$ con $\omega(F) \geq \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Q}$ está dado.

Altenativamente podemos resolver $\text{máx}\, w^T x \mid x \in \text{conv}(\chi^F \mid F \in \mathbb{F}(G))$ en tiempo polinomial.

2) Clase $\mathcal{NP}$: Problemas tales que dado una instancia G y $\alpha \in \mathbb{Q}$, F arbitrario (no necesariamente factible), se puede verificar en tiempo polinomial si $F \in \mathbb{F}(G)$, y en caso de estarlo, si $\omega(F) \geq \alpha$.

A modo de resumen, la clase $\mathcal{P}$ son los problemas polinomialmente resolubles, y la clase $\mathcal{NP}$ son los polinomialmente verificables.

Observación 3. *El nombre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{NP}$ vienen de problemas deterministas y problemas no deterministas. Además, es fácil ver que $(P) \subseteq \mathcal{NP}$*

Gran problema abierto: Es $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ o $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

3.1. Reducción de Cook/Turing de problemas

Definición 1. Dado dos problemas A y B, decimos que A se reduce a B, o bien, $A \leq_P^T B$ si podemos resolver A en tiempo polinomial usando la subrutina que resuelve a B. En particular, si $B \in \mathcal{P}$ entonces $A \in \mathcal{P}$.

Observación 4. *En la definición anterior, la desigualdad se escribe $\leq_P^T$, donde la T proviene de que es la comparación de Turing.*

Definición 2. $\mathcal{NP}$-difícil: Un problema Q es $\mathcal{NP}$-difícil, si $\forall$ problema $X \in \mathcal{NP},\ X \leq_P^T Q$, si ahora $Q \in \mathcal{NP}$ se dirá $\mathcal{NP}$-completo.

4. Próxima Clase

La siguiente clase veremos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Cook-Levin)**.** *Existe un problema $\mathcal{NP}$-difícil, que es $\mathcal{NP}$-completo. Más aún, es el problema denominado SAT, que refiere a determinar si una función booleana $\phi(x)$ es "satisfactible.º no.*

Ejemplo de función SAT: $\phi : \{V, F\}^3 \to \{V, F\}$, definida por $\phi(x) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$. Es fácil notar que ϕ es satisfactible, dado que $\phi((V, V, V)) = V$.