MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): ~~Juan Pablo Donoso~~, Valentina Toro y Yasser Nanjari.
Fecha: 10 de Noviembre 2014 .

Cátedra 25

1. Recuerdo

1.1. Factibilidad de un convexo $K \subseteq \mathbb{R}^d$

Cuando debamos determinar si $K = \emptyset$ o bien si devolver $x \in K$, el método del elipsoide nos permitirá decidir si este conjunto K es un conjunto factible. De la clase anterior sabemos que el método puede realizar esto en

$$O\left(d \cdot \log\left(\frac{V_{Ext}(K)}{V_{Int}(K)}\right)\right) = O\left(d^2 \cdot \log\left(\frac{R}{r}\right)\right)$$

iteraciones y llamadas al oráculo de separación para K, donde

- $V_{Ext}(K)$: Volumen de una bola/elipsoide que cubre a K.
- $V_{Int}(K)$: δ, tal que $K \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \geq \delta$.
- R, r : Radios de las bolas que contienen o están contenidas en K.

Lo antes mencionado se estaba viendo para resolver el problema que se enunciará a continuación.

1.2. Optimización sobre envolturas convexas de vértices del cubo

Problema: Dados $S \subseteq \{0,1\}^d$, $P = conv(S)$, un oráculo para P (P es de dimensión completa o vacío) y $w \in \mathbb{R}^d$ función de pesos (en general trabajamos con $w \in \mathbb{Z}^d$); se busca obtener

$$\min \{w^t x : \ x \in P\}.$$

Vimos que se tenía la factibilidad en P. En efecto, esto se tiene ya que

- $R = \frac{\sqrt{d}}{2}$.
- $V_{Int}(P) \geq \frac{1}{d!}$.

Por lo tanto, bastan $O(d \log(d^{1/2} \cdot d!)) = O(d^2 \cdot \log(d))$ iteraciones para encontrar $x \in P$.

Observación: El $d!$ aparece por lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq 1, \ \forall i \in [d]\} \\
\Delta^d_\Pi &= \{x \in Q^d : 0 \leq x_\Pi(1) \leq \ldots \leq x_{\Pi(d)} \leq 1\}, \quad \text{con } \Pi \in S_d \\
V(Q^d) &= \sum_{\Pi \in S_d} V(\Delta^d_{Pi}) \\
\therefore \quad V(\Delta^d_\Pi) &= \frac{1}{d!} \cdot V(Q^d)
\end{aligned}$$

También definimos para $k \in \mathbb{Z}$

$$P_k = \{x \in P : \ w^t x \leq k + \frac{1}{2}\}.$$

La clase anterior probamos que se puede resolver factibilidad en P_k. En efecto,

- $R = \frac{\sqrt{d}}{2}$
- $V_{Int}(K) \geq \frac{1}{d! \cdot \|w\|_\infty \cdot 2d}$

Luego, podemos decidir factibilidad en P_k utilizando

$$O(d \log(d^2 \cdot d! \cdot d\|w\|_\infty)) = O(d^2 \cdot \log(d\|w\|_\infty))$$

iteraciones y llamados al oráculo.

2. Búsqueda del mínimo

Se realizarán los siguientes pasos para encontrar

$$k^* = \text{mín}\{w^t x : \ x \in P\}$$

(1) Encontrar $x^f \in P$ factible $\Longrightarrow k^* \leq k_{\text{máx}} = \lceil w^t x^f \rceil$.

(2) $k^* \geq k_{\text{mín}} = -d\|w\|_\infty$. (Observación: Esto es cierto, puesto que el mínimo $w^t x$ se alcanza en $x \in S$.)

(3) Se realiza búsqueda binaria para hallar el $k^* \in [k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}]$. Así, se puede encontrar k^* usando

$$O(\log(k_{\text{máx}} - k_{min})) = O(\log(d\|w\|_\infty))$$

test de factibilidad en P_k.

Finalmente, esto da en total

$$O(d^2 \cdot \log^2(d\|w\|_\infty))$$

llamadas al oráculo para P. Así, sabemos cuánto vale k^*.

Ya establecido el valor de k^*, nace la siguiente interrogante: **¿Cómo calcular un punto $x^* \in P$ que alcance dicho valor?**

Se define

$$P' = \{x \in P : \ w^t x = k^*\}$$

y luego se despeja una variable en función de las demás para considerar P' como polítopo en $d-1$ dimensiones. Si P' no es de dimensión completa, entonces se puede despejar una variable en función de las demás y repetir hasta llegar a un P^* de dimensión $d' < d$ completa.

Cualquier punto de P^* es solución óptima y se puede encontrar dicho punto con el método elipsoidal. Más aún, podemos devolver un vértice del problema original. Para realizar esto, tenemos dos formas posibles:

(1) Iterar el método del elipsoide para mín $\{w_2^t x : \ x \in P^*\}$, donde w_2 es una función de peso arbitraria.

(2) Invertir una matriz dada por d' desigualdades l.i de P^*.

Gracias a esto, se puede concluir el siguiente teorema:

Teorema 1. *Dado P polítopo con oráculo de separación, $P = conv(S)$, $S \subseteq \{0,1\}^d$ y $w \in \mathbb{Z}^d$, podemos encontrar vértice óptimo de*

$$\text{mín } \{w^t x : \ x \in P\} = \text{mín}\{w^t x : \ x \in S\}$$

usando $O(d^3 \cdot \log(d\|w\|_\infty))$ llamadas al oráculo.

3. Teorema de Khachiyan

Teorema 2 (Khachiyan)**.** *El problema*

$$
\begin{array}{rrl}
(P) & \text{máx} & c^t x \\
 & s.a & Ax \leq b \\
 & & A \in \mathbb{Q}^{m \times d} \\
 & & b \in \mathbb{Q}^m \\
 & & x \in \mathbb{Q}^d
\end{array}
$$

Se puede resolver en tiempo débilmente polinomial, es decir, polinomial en m, d y $\log(U)$, donde

$$U = \text{máx}\{\|A\|_\infty, \|c\|_\infty, \|b\|_\infty\}$$

Demostración: (Esquema)

(1) El problema se reduce a mostrar factibilidad de

$$P = \{(x, y) : \ Ax \leq b,\ A^t y = x,\ y \geq 0,\ c^t x = b^t y\}.$$

Luego, basta dedicarnos a probar factibilidad en $Q = \{x : \ Ax \leq b\}$, con A y b distintos a los anteriores, ya que si somos capaces de crear un algoritmo polinomial para este problema, lo tenemos para el anterior.

(2) Nos reducimos ahora al caso en que $Q \neq \emptyset$, ya que entonces Q tiene al menos un vértice. Esto se hace diagonalizando la matriz A, es decir,

$$A \longrightarrow [A' : 0].$$

$A'x' \leq b'$ tiene vértices si y sólo si $Q \neq \emptyset$.

(3) Se acota el tamaño de los vértices: Todo vértice x de $Ax \leq b$ es solución de $Cx = p$ para cierta submatriz C de A y subvector p de b, con C invertible.

Lema 1. *Sea $x = C^{-1}p$. Entonces x es un punto racional con numerador y denominador acotados por $(d \cdot U)^d$.*

Demostración: (Usando la fórmula de Cramer)

$$x_j = \frac{\det(C; P; j)}{\det(C)}$$

donde $(C; p; j)$ es la matriz obtenida al reemplazar la j-ésima columna de C por el vector p.

$$
\begin{aligned}
|\det(X)| &= \left| \sum_{\Pi \in S_{d'}} sgn(\Pi) \cdot \prod_{i=1}^{d'} x_{i,\Pi(i)} \right| \\
&\leq d'! \cdot \|X\|_\infty^{d'},
\end{aligned}
$$

donde X es de dimensión d'. En nuestro caso, tanto el numerador como el denominador de x_j es un entero menor o igual a $d^d U^d = (dU)^d$.

Luego, todos los vértices de Q están en la bola

$$B_a(0, (dU)^{2d}) \subseteq B(0, \sqrt{d}(dU)^{2d})$$

Así, para partir el método del elipsoide usamos $B(0, \sqrt{d}(dU)^d)$ (si hay un vértice, está en esta bola).

(4) Para evitar el caso $Q = \emptyset \ \wedge \ V(Q) = 0$ trabajamos con

$$Q_{Exp} = \{x \in \mathbb{R}^d : \ Ax \leq b + \varepsilon \cdot \mathbb{1}\},$$

donde ε será fijado después.

Lema 2. *Para ε suficientemente pequeño:*

$$Q = \emptyset \iff Q_{Exp} = \emptyset$$

Demostración:

($\Longleftarrow$) Como $Q \subseteq Q_{Exp}$, esta implicancia es obvia.
($\Longrightarrow$) Usando Farkas, como $Q = \{Ax \leq b\} = \emptyset$, tenemos que $\exists \ y \geq 0$ tal que $A^t y = 0, \ b^t y = -1$.

Si $Q_{Exp} \neq \emptyset$, tiene un punto $x^* \in Q_{Exp}$. Vemos entonces que

$$0 \ = \ y^t(Ax^*) \ \leq \ y^t(b + \varepsilon \cdot \mathbb{1}) \ = \ -1 + \varepsilon \cdot y^t \mathbb{1} \ \leq -1 + \frac{1}{2} \ = \ -\frac{1}{2} \ < \ 0$$

donde la penúltima desigualdad se obtiene eligiendo ε adecuado (*). Así, se obtiene una contradicción y se concluye que $Q_{Exp} = \emptyset$.

(*) Para determinar ε, podemos suponer que y es vértice del sistema. Entonces, por el **Lema 1**,

$$\|y\|_\infty \leq (dU)^{2d}$$

$$\Longrightarrow |y^t \mathbb{1}| \leq d(dU)^{2d}$$

Finalmente, basta tomar $\varepsilon \leq \frac{1}{2d(dU)^{2d}}$ para concluir. ■

Para terminar la demostración de Kachiyan, podemos revisar la factibildad de Q_{Exp} usando

$$O\left(d \log\left(\frac{(\sqrt{d}(dU)^{2d})^d}{V_{Int}(Q_{Exp})}\right)\right)$$

Notemos que si $Q \neq \emptyset$, entonces $\exists x^* \in Q$.

$$\Longrightarrow \quad \prod_{j=1}^{d} [x_j^*, x_j^* + \delta] \ \subseteq \ Q_{Exp}.$$

En efecto, si x' está en dicho intervalo,

$$Ax' = Ax^* + A(x^* - x') \leq b + (dU\delta) \cdot \mathbb{1}$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{dU} = \frac{1}{2d(dU)^{2d+1}}$, concluimos que $x' \in Q_{Exp}$. Luego,

$$V(Q_{Exp}) \ \geq \ \delta^d \ = \ \frac{1}{2^d \cdot d^d \cdot (dU)^{d(2d+1)}}.$$

Juntando todo esto, necesitamos

$$O\left(d \log\left((dU)^{O(d^2)} \cdot (2dU)^{O(d^2)}\right)\right) = O\left(d^3 \log(dU)\right)$$

llamados a el oráculo de Q.
Como este oráculo es polinomial, obtenemos un algoritmo polinomial. ■

Observación: En realidad encuentra un punto en Q_{Exp}. Para encontrar un punto de Q existen técnicas de redondeo que no veremos.

3.1. Aplicación del teorema

Problemas de flujo de costo mínimo o con demandas, costos y capacidades.
Sean

- $G = (V, E)$ grafo dirigido
- $b(v)$ la demanda de flujo de $v \in V$ (si es negativo, es oferta)
- $c(e)$ el costo de un arco $e \in E$
- Capacidades de los arcos en el intervalo $[l(e), u(e)]$

El problema de envío de flujo de costo mínimo es

$$\text{mín} \quad \{c^t : \ x \in \mathbb{R}^E; \ x(\delta^-(v)) - x(\delta^+(v)) = b(v) \text{ para todo } v \in V; \ l(e) \leq x(e) \leq u(e) \text{ para todo } e \in E.\}$$

y es soluble con Khachiyan, pero es lento (lo escrito en rojo son restricciones que se pueden testera en tiempo polinomial).