Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA 3705 - Auxiliar 14

Profesor: José Soto S.
Auxiliares: Felipe Contreras S. Abner Turkieltaub M.

6 de noviembre, 2014

P3. Considere dos conjuntos de alumnos beauchefianos, computines y matemáticos, representados por C y D, respectivamente. Cada una de estas carreras es muy unida, así que puede suponer que todos los alumnos computines son amigos entre sí y todos los alumnos matemáticos son amigos entre sí. Naturalmente, hay además algunos pares de amigos mutuos formados entre computines y matemáticos. Definimos el conjunto total de alumnos a estudiar como $U := C \cup D$. Cuando se matricularon por primera vez, a cada alumno se le tomó un test de diagnóstico, así que cada alumno $u \in U$ tiene asociado un *índice de coeficiente intelectual* dado por una función $q\colon U \to \mathbf{R}^+$.

El decano quiere seleccionar un equipo $S \subseteq U$ para que represente a la Facultad en el Mathemathical Olympiad in Combinatorial Optimization (MOCO). Como se necesita un equipo comprometido y con compañerismo, el decano exije que este equipo S cumpla que todo par de personas en S sean amigos entre sí. Llamamos $\mathcal{S}$ a los equipos de alumnos que cumplen tal condición. Además, queremos un equipo inteligente, así que entre todos los $S \in \mathcal{S}$, queremos escoger el que maximice la suma de los coeficientes intelectuales de cada uno. En otras palabras queremos encontrar $S \in \mathcal{S}$ tal que $q(S) = \sum_{s \in S} q(s)$ sea máximo. Para ello, procederemos como sigue

a) Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $S \subseteq V$ se dice independiente si ningún par de elementos en S están conectados entre sí. Demuestre que S es independiente si y sólo si $V \setminus S$ es cubrimiento de vértices.

S indep. $\iff \forall u, v \in S, uv \notin E \iff \forall e = xy \in E, x \notin S \vee y \notin S \iff$ $V \setminus S$ es VC.

b) Usando lo anterior, muestre que el problema del decano es equivalente a uno de encontrar un cubrimiento de vértices de peso mínimo en un grafo bipartito.

Sea G dado por $V(G) = U, E(G) = E(G) = \{ij : i, j \text{ son amigos}\}$. Consideremos $\bar{G}$ el complemento de G. Tenemos que $\bar{G}$ es bipartito. El problema se reduce a encontrar $S \subseteq V$ inpenediente en $\bar{G}$ de peso máximo. Como $q \geq 0$ se tiene que

$$S \text{ indep. de suma máxima} \iff V \setminus S \text{ es cubrimiento de peso mínimo}$$

c) Modele este nuevo problema como un problema de corte mínimo sobre una red.

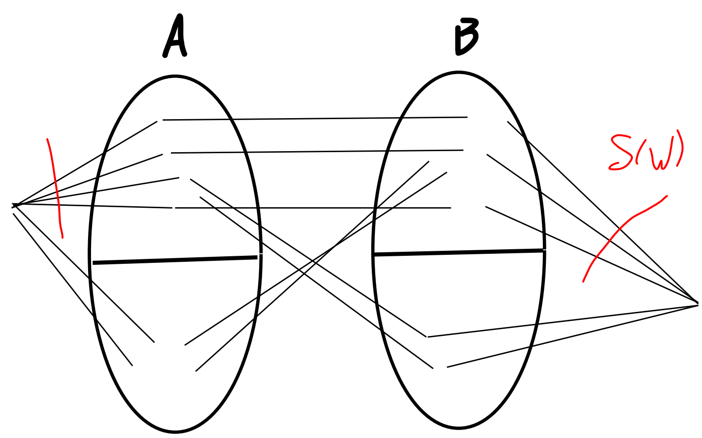
Consideremos la red (G', u, s, t) dada por $V(G') = V \cup \{s, t\}, E(G') = \{(a, b) : a \in A, b \in B, ab \in E\} \cup \{(s, a) : a \in A\} \cup \{(b, t) : b \in B\}$ y

$$u(e) = \begin{cases} q(a) & e = (s, a), a \in A \\ q(b) & (b, t), b \in B \\ \infty & \sim \end{cases}$$

Sea K finito. Entonces,

$\bar{G}$ tiene un cub. de veértices de peso $K \iff (G', u, s, t)$ tienen un (s, t)-corte de peso K

$\Rightarrow$ Sea S un cub. de vértices de peso K en $\bar{G}$. Consideremos el (s, t)-corte generado por $W = \{s\} \cup (A \setminus S) \cup (B \cap S)$. El valor del corte es la suma de las capacidades de las aristas que salen de W, pero solo hay aristas de la forma $(s, a), (b, t)$ con $a \in A \cap S, b \in B \cap S$. Luego, $c(W) = \sum_{v \in S} q(a) = K$.



$\Leftarrow$ Si W es corte de (G', u, s, t) con valor K finito, entonces si (a, b) es arco, $a \in W \Rightarrow b \in W$ (si no, el corte tiene capacidad infinita). Sea $S = (A \setminus W) \cup (B \cap W)$. Veamos que S es cub. de vértices. Si uv no está cubierto por S, $u \notin S \Rightarrow u \in W \Rightarrow v \in W \Rightarrow v \in S \rightarrow\leftarrow$.

El peso de W son las aristas que salen. Ninguna arista con capacidad infinita sale de W, pues solo salen de $\{s\}$ a A o de B a $\{t\}$. Luego, $c(W) = \sum_{A \setminus W} qv + \sum_{B \cap W} qv$.