Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA 3705 - Auxiliar 14

Profesor: José Soto S.
Auxiliares: Felipe Contreras S. Abner Turkieltaub M.

6 de noviembre, 2014

P1. Usted es hincha del club de fútbol Deportivo Independiente Medellín que actualmente está jugando un importante torneo. En este torneo hay P equipos y cada equipo juega con un equipo distinto exactamente M veces. El ganador de un partido se gana dos puntos, mientras que el perdedor no gana nada. En caso de empate, cada equipo gana un punto. El ganador del torneo es el que tiene más puntos. (En caso de haber más de un máximo, no hay ganador.)

El campeonato está muy peleado, actualmente lidera el DCC (Deportivo Colo Colo) y usted quiere saber si su equipo favorito tiene aún alguna posibilidad de salir campeón. Dada una tabla con los resultados de partidos anteriores, determine si aún es posible o no que el DIM salga campeón, reduciendo el problema a un problema de encontrar flujo máximo.

P2. Considere una red (G, u, s, t) donde las capacidades son enteras. Queremos Considerar una variante de Edmonds-Karp, donde buscamos el camino en el grafo residual que tenga mayor capacidad. Dado el grafo residual (G^f, u^f, s, t), usaremos búsqueda binaria, pues sabemos que el flujo está en el interválo $[0, \max\{c^f(e)\}]$.

Algoritmo 1: CaminoMáximo(G^f, c^f, s, t)

```
k ← 0
a_0 ← 0
b_0 ← u* + 1
m_0 ← ⌊(a_0 + b_0)/2⌋
while b_k − a_k > 1 do
    Busca un (s − t)-camino P_k en G^f que use aristas de capacidad al
    menos m_k
    if No existe P_k then
        a_{k+1} ← a_k
        b_{k+1} ← m_k
    else
        a_{k+1} ← m_k
        b_{k+1} ← b_k
        P ← P_k
    m_{k+1} ← ⌊(a_{k+1} + b_{k+1})/2⌋
    k ← k + 1
if a_k > 0 then
    return P
```

Demuestre la correctitud del algoritmo y calcule su complejidad.

P3. Considere dos conjuntos de alumnos beauchefianos, computines y matemáticos, representados por C y D, respectivamente. Cada una de estas carreras es muy unida, así que puede suponer que todos los alumnos computines son amigos entre sí y todos los alumnos matemáticos son amigos entre sí. Naturalmente, hay además algunos pares de amigos mutuos formados entre computines y matemáticos. Definimos el conjunto total de alumnos a estudiar como $U := C \cup D$. Cuando se matricularon por primera vez, a cada alumno se le tomó un test de diagnóstico, así que cada alumno $u \in U$ tiene asociado un *índice de coeficiente intelectual* dado por una función $q \colon U \to \mathbf{R}^+$.

El decano quiere seleccionar un equipo $S \subseteq U$ para que represente a la Facultad en el Mathemathical Olympiad in Combinatorial Optimization (MOCO). Como se necesita un equipo comprometido y con compañerismo, el decano exije que este equipo S cumpla que todo par de personas en S sean amigos entre sí. Llamamos $\mathcal{S}$ a los equipos de alumnos que cumplen tal condición. Además, queremos un equipo inteligente, así que entre todos los $S \in \mathcal{S}$, queremos escoger el que maximice la suma de los coeficientes intelectuales de cada uno. En otras palabras queremos encontrar $S \in \mathcal{S}$ tal que $q(S) = \sum_{s \in S} q(s)$ sea máximo. Para ello, procederemos como sigue

a) Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $S \subseteq V$ se dice independiente si ningún par de elementos en S están conectados entre sí. Demuestre que S es independiente si y sólo si $V \setminus S$ es cubrimiento de vértices.

b) Usando lo anterior, muestre que el problema del decano es equivalente a uno de encontrar un cubrimiento de vértices de peso mínimo en un grafo bipartito.

c) Modele este nuevo problema como un problema de corte mínimo sobre una red.

d) Usando todo lo anterior, encuentre un algoritmo polinomial en $|U|$ que resuelva el problema. Muestre su correctitud y analice su complejidad.