



MA 3705 - Auxiliar 13

Profesor: José Soto S.

Auxiliares: Felipe Contreras S. Abner Turkieltaub M.

30 de octubre, 2014

P1. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, $w: V \rightarrow \mathbf{Q}^+$ una función no negativa en los nodos y $\bar{w}: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$ una función no negativa en los arcos. Se define la capacidad mixta ρ de un conjunto $S \subseteq V$ como

$$\rho(S) = w(S) + \bar{w}(\delta^+(S)).$$

Un conjunto $S^* \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset, V\}$ se dice **corte mixto mínimo global** de G si $\rho(S^*)$ es mínimo. Deseamos encontrar un algoritmo para encontrar S^* . Para esto procedemos como sigue:

a) Sea (H, u, s, t) una red. Defina

$$\mathcal{C}(H, s, t) = \{S \subseteq V(H) : s \in S, t \notin S, |V \setminus S| \geq 2, |S| \geq 2\}$$

como el conjunto de todos los $s-t$ cortes que no dejan solos ni a t ni a s . Diseñe un algoritmo fuertemente polinomial para encontrar el corte S en $\mathcal{C}(H, s, t)$ de capacidad $u(\delta_H^+(S))$ mínima.

Indicación: Para todo $S \in \mathcal{C}$ existen v_1 y v_2 en $V(H) \setminus \{s, t\}$ tal que $v_1 \in S$ y $v_2 \in V(H) \setminus S$. Separe el problema en $O(|V(H)|^2)$ subproblemas distintos, dependiendo de v_1 y v_2 .

b) Construya una red auxiliar (H, u, s, t) de tal manera que la capacidad mixta mínima en el grafo G del principio del problema, corresponda al mínimo de $u(\delta_H^+(S))$ sobre $\mathcal{C}(H, s, t)$.

c) Usando las partes anteriores, diseñe un algoritmo fuertemente polinomial para encontrar un corte mixto mínimo global de G . Determine la complejidad de su algoritmo.

P2. Sea G un grafo con conjunto de vértices $[n]$. Llamemos $v[i, j]$ al valor del corte mínimo entre los vértices i y j . Demuestre que existen a lo más $n-1$ valores distintos entre los $\binom{n}{2}$ números $v[i, j]$, $i, j \in [n]$.

P3. La arista-conectividad de un grafo G se define como la mínima cantidad de aristas que es necesario borrar para desconectar G . Encuentre un algoritmo polinomial que calcule la arista-conectividad de un grafo.