Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA 3705 - Auxiliar 11

Profesor: José Soto S.
Auxiliares: Felipe Contreras S. Abner Turkieltaub M.

16 de octubre, 2014

P1. [Unión de matroides] Sean $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$ dos matroides. Demuestre que $M_1 \vee M_2 = (S := S_1 \cup S_2, \{X \cup Y \colon X \in I_1, Y \in I_2)$ es una matroide con función de rango

$$r_{1,2}(U) = \min_{Z \subseteq U} |U \setminus Z| + r_1(Z \cap S_1) + r_2(Z \cap S_2).$$

P2. Dado $G = (V, E)$ un grafo simple y una función $k \colon V \to \mathbf{N}$, queremos orientar las aristas de G de modo que la cantidad de arcos entrantes a v sea a lo más $k(v)$, $\forall v \in V$. Demuestre que existe tal orientación si y solo si

$$\forall P \subseteq V, |E(P)| \leq \sum_{v \in P} k(v)$$

P3. Catalina y Juan juegan sobre $G = (V, E)$ grafo conexo de la siguiente forma: en cada turno, Catalina borra una arista de G y Juan elige una arista que no puede ser borrada. Juan gana si, al final del juego, las aristas que fijó generan G y gana Catalina en caso contrario. Demuestre que Juan tiene estrategia ganadora si existen dos árboles generadores disjuntos en G y que Catalina tiene estrategia ganadora en caso contrario.

P4. Dado un grafo bipartito $G = (L, R, E)$, resuelva el problema de emparejamiento de cardinalidad máxima reduciéndolo al problema de flujo máximo en una red.