

Cátedra 17

1. Teorema de intersección de matroides

Se había empezado a trabajar en la demostración del teorema de intersección de matroides:

Teorema 1. *Intersección de matroides.* Sean M_1 y M_2 dos matroides sobre el conjunto S . Entonces:

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{X \subseteq S} r_1(X) + r_2(S \setminus X) \quad (1)$$

Además se puede encontrar X^* e I^* en tiempo polinomial

La clase anterior se demostró la desigualdad \leq y se dijo que se demostraría \geq de forma algorítmica usando como inspiración el algoritmo para encontrar caminos M-aumentantes. Para ello, se había definido $M = (S, \mathcal{I})$ matroide $I \in \mathcal{I}$ y se había creado el grafo de intercambio $G(M, I)$ en donde $xy \in E \Leftrightarrow I + y - x \in \mathcal{I}$. Por último se había enunciado el siguiente lema que se terminará de demostrar a continuación :

Lema 1. Si $I, J \in \mathcal{I}$ con $|J| = |I|$ entonces, existe un matching perfecto en $G(M, I)$ entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$, i.e., existe matching perfecto en el subgrafo inducido por estos dos conjuntos.

Demostración. Sea H el subgrafo inducido por $I \setminus J$ y $J \setminus I$. Se razonará por contradicción: Si no existiera matching perfecto en H , por el teorema de Hall, $\exists W \subseteq J \setminus I$ tal que $|\mathcal{N}_H(W)| < |W|$.

Se observa que: $(I \cap J) \cup \mathcal{N}_H(W) \in \mathcal{I}$ pues $\mathcal{N}_H(W) \subseteq I$ y además, como $W \subseteq J$ entonces, $(I \cap J) \cup W \in \mathcal{I}$. Por axioma de aumento, $\exists e \in ((I \cap J) \cup W \in \mathcal{I}) \setminus ((I \cap J) \cup \mathcal{N}_H(W))$ tal que $(I \cap J) \cup \mathcal{N}_H(W) + e \in \mathcal{I}$.

Se nota lo siguiente : $|I \setminus J| = |J \setminus I|$ y que $|\mathcal{N}_H(W)| < |W|$ por lo tanto, $|(I \setminus J) \setminus \mathcal{N}_H(W)| > |(J \setminus I) \setminus W|$. De lo anterior se deduce que existe un elemento f en $(I \setminus J) \setminus \mathcal{N}_H(W)$. Como $f \notin \mathcal{N}_H(W)$, se tiene que $ef \notin E(G)$, es decir, $I + e - f \notin \mathcal{I}$

De lo anterior, se deduce que $I + e \notin \mathcal{I}$; luego $I + e$ tiene un circuito. Sea C dicho circuito. Este último no puede estar contenido completamente en $((I \cap J) \cup \mathcal{N}_H(W) + e)$, pues dicho conjunto es independiente. Luego, C contiene un elemento g en $(I + e) \setminus ((I \cap J) \cup \mathcal{N}_H(W) + e) = I \setminus J \setminus \mathcal{N}_H(W)$. Se concluye que $I + e - g \in \mathcal{I}$, de lo que se deduce que $ge \in E(G)$. Esto es una contradicción, pues $g \notin \mathcal{N}_H(W)$. □

Corolario 1. *Axioma de Intercambio de Bases.* Si I, J son bases de S con $M = (S, \mathcal{I})$ matroide, entonces $\exists \phi : I \rightarrow J$ biyectiva tal que $I + \phi(x) - x$ es base de S .

Demostración. Directa del Lema 1. □

A continuación se construirá el algoritmo que permitirá demostrar el Teorema de Intersección de Matroides:

Definición 1 (Digrafo de intercambio entre dos matroides). Sean $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides. Se define el digrafo de intercambio asociado como $D = D(M_1, M_2, I)$, $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ como

$$\begin{aligned} xy \in E(D) &\Leftrightarrow I + y - x \in \mathcal{I}_1 \\ y'x' \in E(D) &\Leftrightarrow I + y' - x' \in \mathcal{I}_2 \end{aligned}$$

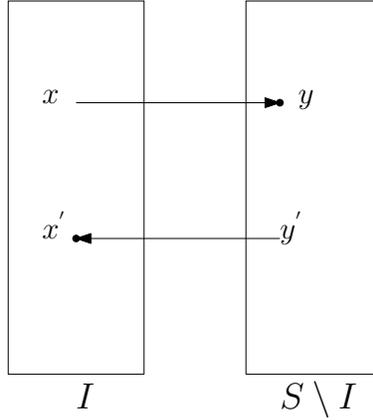


Figura 1: Diagrama digrafo de intercambio entre dos matroides

Obs 1. D es la superposición de $G(M_1, I)$ orientado hacia la derecha y $G(M_2, I)$ orientado hacia la izquierda.

<p>Algoritmo 1:</p> <pre> Sea $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ Construir $D = (M_1, M_2, I)$ $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$ $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$ while $\exists X_1$-X_2 camino en D do Sea P el camino más corto de X_1 a X_2. $I \leftarrow I \Delta V(P)$. (Este conjunto pertenece a $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ y tiene un elemento más que I) end $X \leftarrow \{v \in S : \exists v$-$X_2$ camino $\}$ return (I, X) </pre>

Este algoritmo devuelve $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $X \subseteq S$ tal que $|I| = r_1(X) + r_2(S \setminus X)$. Se demostrará la correctitud de este algoritmo en dos lemas:

Lema 2. Si I es tal que en D no existe un X_1 - X_2 camino entonces el conjunto X retornado por el algoritmo satisface $|I| = r_1(X) + r_2(S \setminus X)$.

Demostración. Se probará que $|I \cap X| = r_1(X)$. Se razonará por contradicción: si esto no ocurre significa que

$$|I \cap X| < r_1(X) \tag{2}$$

Notar que $X_2 \subseteq X$ y $X_1 \cap X = \emptyset$ (Pues se sale del while cuando no existen X_1 - X_2 caminos). De (2) sabemos que $\exists x \in X \setminus I$ tal que $I \cap X + x \in \mathcal{I}_1$ (Pues si el conjunto independiente $I \cap X$ tiene cardinal menor que el rango siempre se puede aumentar). Por otro lado como I es independiente, $I \cap X + x \in \mathcal{I}_1$ entonces es posible aumentar el tamaño de $I \cap X + x$ con elementos de $I \setminus ((I \cap X) + x)$ hasta que tenga tantos elementos como I . De aquí se concluye que como $I \cap X + x$ tiene un elemento más que $I \cap X$ entonces $\exists y \in I \setminus X$ tal que $I + x - y \in \mathcal{I}_1$. Luego por definición se tiene que $(y, x) \in D$ pero, esto es una contradicción pues, como $x \in X$ entonces $\exists x$ - X_2 camino luego existe un y - X_2 camino pero $y \notin X$.

De forma similar se prueba (cambiando el rol de X por el de $S \setminus X$) que $|I \cup (S \setminus X)| = r_2(S \setminus X)$ de lo que se tiene que,

$$|I| = |I \cap X| + |I \cap (S \setminus X)|$$

$$|I| = r_1(X) + r_2(S \setminus X)$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

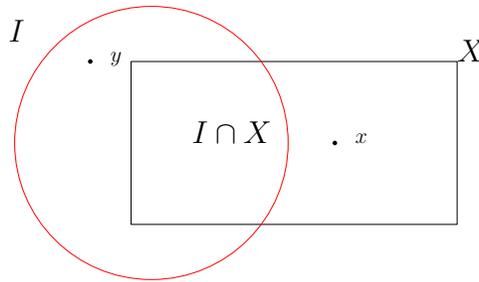


Figura 2: Diagrama situación demostración anterior: el cuadrado representa el conjunto X y el círculo el conjunto I

Lema 3. Si P es un $X_1 - X_2$ camino mínimo $\Rightarrow I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

Veamos primero una proposición antes de demostrar el lema.

Proposición 1. Sea $M(S, \mathcal{I})$ una matroide. Si $I \in \mathcal{I}, J \subseteq S$ son tales que existe un único matching perfecto N entre I y J en $G = G(M, I)$, entonces $J \in \mathcal{I}$.

Notemos que es una especie de recíproca del lema del inicio de la clase. Utilizemos esta proposición para demostrar el lema 2.

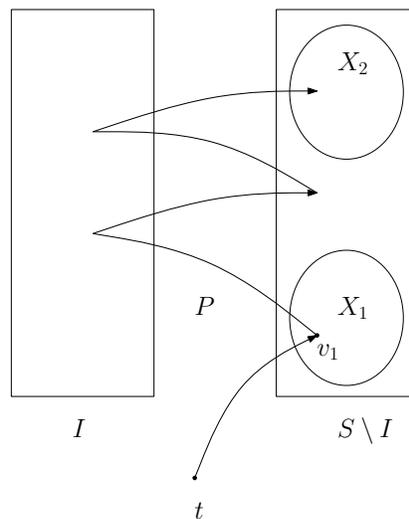


Figura 3: P un $X_1 - X_2$ camino.

Demostración del Lema 3. Una observación que podemos hacer de la figura es que si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall y \in X_1 \cap X_2 I + y \in \mathcal{I}_1$ y $I + y \in \mathcal{I}_2$ luego $I + y \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$. Consideremos entonces el caso $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y demostremos en primera instancia que $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$. Definimos la matroide auxiliar $M_1 = (S + t, \{F \subseteq S + t : F - t \in \mathcal{I}_1\})$, donde t es un elemento auxiliar fuera de S . Notar que en el grafo de intercambios $G(M_1, I + t)$, el elemento t se conecta mediante una arista a todos los elementos de X_1 .

Las aristas pares del camino P junto con $e = tv_1$, donde v_1 es el primer vértice de P , son un matching perfecto entre $I \cap V(P) + t$ y $V(P)$ en el grafo $G(M_1, I + t)$. De hecho este es el único matching perfecto en $G(M_1, I + t)$ entre estos conjuntos, esto pues de existir otro existiría un camino más corto de X_1 a X_2 en G , pero por hipótesis P era de largo mínimo.

Usando la proposición obtenemos que $I + t \in \mathcal{I}'_1 \Rightarrow I\Delta V(P) \in \mathcal{I}'_1$, esto último pues $I + t \setminus (I\Delta V(P)) = V(P) \cap I + t$ e $I\Delta V(P) \setminus (I + t) = V(P) \setminus I$. Como $I\Delta V(P)$ no contiene a t , entonces $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.

De la misma forma, podemos probar $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_2$ simplemente agregando ahora t como último vértice de P . Esto completa la demostración. □

Sólo resta demostrar la proposición.

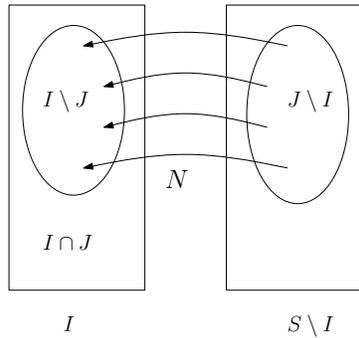


Figura 4: Digrafo Auxiliar

Demostración de la Proposición 1. Dirigimos las aristas del matching N hacia la izquierda y el resto de las aristas de G hacia la derecha. En este digrafo no hay ciclos dirigidos, pues si hubiese un C diciclo entonces $N\Delta C$ sería otro matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$. Luego es un digrafo acíclico y entonces tiene un orden topológico.

De hecho podemos imponer que si $e = xy \in M$ entonces el índice de y en el orden es uno mayor que el de x . Formalmente significa que podemos tomar una función $\phi : S \mapsto |S|$ tal que si $M = \{y_1x_1, y_2x_2, \dots\}$ entonces $\phi(x_i) = \phi(y_i) + 1 < \phi(y_{i+1})$. Notemos que bajo esta numeración no existen arcos desde x_i, y_i hasta y_j, x_j respectivamente para $j < i$.

Supongamos que $J \notin \mathcal{I}$ luego existe C circuito contenido en J . Dicho circuito contiene algún $y_i \in J \setminus I$ y lo tomamos con el mayor subíndice.

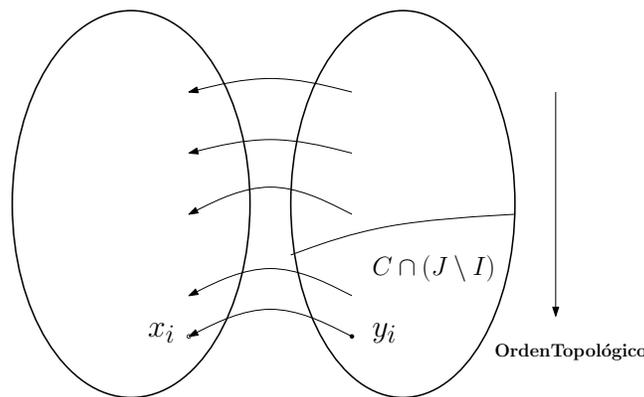


Figura 5: $I \setminus J$ y $J \setminus I$

Por construcción $x_i y$ no es arista (incluso olvidando la dirección) de E para cualquier $y \in C - y_i$. Como $x_i y \notin E$ entonces $I + y - x_i \notin \mathcal{I}$, luego $y \in \text{Span}(I - x_i)$ por lo que $C - y_i \subseteq \text{Span}(I - x_i)$.

Por otro lado, como C es circuito, $y_i \subseteq \text{Span}(C - y_i) \subseteq \text{Span}(I - x_i)$. Es decir, y_i está generado por $I - x_i$ y luego $I - x_i + y_i$ no puede ser independiente. Pero esto contradice que $x_i y_i \in E(G(M, I))$. □