MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Benjamín Ruiz
Fecha: 3 de Octubre del 2014 .

Cátedra 15

Habíamos visto:

1. Algortimo Húngaro Primal-Dual

Recordemos que el algoritmo húngaro primal-dual recibe como entrada una matriz de costos c_{ij} y devuelve un matching perfecto M de costo mínimo junto con el par (u, v) dual óptimo. Veamos su seudocódigo:

Algoritmo 1 Algoritmo Húngaro Primal-Dual

```
# Solución Inicial:
y_i ← 0, ∀i ∈ L.
z_j ← mín{c_ij : i ∈ L}, ∀j ∈ R.
w_ij ← c_ij − y_i − z_j, ∀(i, j) ∈ L × R
E_o ← {ij ∈ E : w_ij = 0}.
M ← matching máximo en E_0.
while (M no es matching perfecto en E_0) do
    Crear D((V, E_0), M).
    T ← vértices alcanzables desde s en D((V, E_o), M).
    δ ← mín{w_ij : i ∈ L ∩ T, j ∈ R \ T}.
    y_i ← y_i + δ, ∀i ∈ L ∩ T.
    z_j ← z_j − δ, ∀j ∈ R ∩ T.
    # Actualizar E_0 y M:
    E_o ← {ij ∈ E : w_ij = 0}.
    M ← matching máximo en E_0.
end while
return M, y, z.
```

Es importante recordar que el algoritmo recién enunciado encuentra un matching perfecto de costo mínimo en el grafo bipartito $G = (A\dot{\cup}B, E)$ con $E = A \times B, |A| = |B| = n$ y $C_{ij} \in \mathbb{R}$. Además se basa es la siguiente igualdad entre los valores óptimos de los problemas primal y dual:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i\in L, j\in R} x_{ij}c_{ij} \quad &= \quad \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j \\
s.a \quad & \quad\; s.a \\
\sum_i x_{ij} = 1 \;\forall j \in R \quad & \quad\; y_i + z_j \leq c_{ij} \\
\sum_j x_{ij} = 1 \;\forall i \in L \quad & \\
x \geq 0 \quad &
\end{aligned}$$

Vimos que el algoritmo, de terminar, es correcto. Más aún veremos que termina en tiempo polinomial. Para probar esto, veremos que el algoritmo es polinomial y tiene complejidad $O(n^4)$.

Recordemos la siguiente observación:

Sea M, E_0, w al comienzo de una iteración y T el conjunto de nodos alcanzables desde s en $D = D((V, E_0), M)$ Similarmente, sea y M', E_0', w', T' al final de una iteración (y $D' = D((V, E_0'), M')$). Sea $E^* = (L \cap T \times R \cap T) \cup (L \setminus T \times R \setminus T)$ el conjunto de aristas de E que conectan vértices con el mismo estado (alcanzable con alcanzable / no alcanzable con no alcanzable).

Entonces:

1. Como $C = (L \setminus T) \cup (R \cap T)$ es un cubrimiento de (V, E_0) tenemos que E_0 es disjunto de $L \cap T \times R \setminus T$.

2. Como cada arista de M es incidente a exactamente un vértice de C, tenemos que $M \subseteq E^*$.

3. Las aristas en E^* satisfacen que $w'(e) = w(e)$.

Concluimos que las aristas de $E_0 \cap E^*$ siguen estando en E_0' al final de la iteración. Luego tenemos que:

Lema 1. *El tamaño del matching maximo M solo aumenta de iteración en iteración.*

Diremos que una iteración del algoritmo Húngaro Primal-Dual es exitosa si el tamaño de M aumenta en dicha iteración. En particular pueden haber a lo más n iteraciones exitosas.

Lema 2. *Entre cada par de iteraciones exitosas consecutivas hay a lo más n iteraciones.*

Demostración. En una iteración no exitosa el tamaño de M no aumenta, luego M es un matching de tamaño máximo en E_0' también. Sin pérdida de generalidad suponemos que $M' = M$. De las observaciones anteriores sabemos que las aristas en $E_0 \cap E^*$ siguen estando en E_0'. Por lo tanto, todos los arcos entre nodos alcanzables en D siguen estando presentes en D'. Esto quiere decir que todos los nodos que eran alcanzables en D, siguen siendo alcanzables en D'.

Además, en cada iteración, agregamos un nodo al conjunto de los alcanzables: el arco $ij \in L \cap T \times R \setminus T$ que tiene $w(ij) = \delta$ es tal que después de la actualización, $w'(ij) = 0$. Es decir, $ij \in E_0' \setminus E_0$. Notar que j no es alcanzable en D. Sin embargo, como i era alcanzable en D (y luego en D' también), ahora tenemos que j es alcanzable en D'.

Hemos probado que $|T|$ crece en iteraciones no exitosas. Luego pueden haber a lo más n iteraciones no exitosas consecutivas. □

Corolario 1. *El algoritmo tiene $O(n^2)$ iteraciones.*

En particular

Teorema 1. *El algoritmo Húngaro primal dual calcula una asignación (matching perfecto) de costo mínimo en tiempo $O(n^4)$ y una solución dual (y, z) de igual valor.*

Observación 1. La complejidad se puede mejorar a $O(n^3 \log n)$ usando colas de prioridad.

Veamos algunas consecuencias.

Teorema 2 (König-Egerváry)**.** *Si los costos c_{ij} son enteros, entonces el problema dual admite una solución (y, z) con coordenadas enteras.*

Demostración. Directo de como se actualiza la solución en el algoritmo. □

Teorema 3 (Birkhoff-Von Neumann)**.** *Sea G un grafo bipartito completo y balanceado ($|L| = |R|$, $E = L \times R$). Y para cualquier matching perfecto M, sea χ^M su vector indicatriz ($\chi^M \in \mathbb{R}^E$, $\chi^M_e = \mathbb{1}_{\{e \in M\}}$).*

Tenemos que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) = 1, \forall v; x \geq 0\}$$

es igual a

$$P_{matching\ perfecto}(G) = conv\{\chi^M : M \text{ matching perfecto de } G\}.$$

Demostración. Notemos que $P_{\text{matching perfecto}}(G)$ (pues P es convexo y los vértices de $P_{\text{mp. de } G}$ están en P). Para ver la otra inclusión notemos que para cualquier función de costo $c \in \mathbb{R}^E$ la expresión $\min\{c^T x : x \in P\}$ se minimiza en un punto con coordenadas enteras (según el algoritmo húngaro primal dual). De aquí se deduce que todo punto extremo de P es integral, y luego está en $P_{\text{matching perfecto}}(G)$. □

El teorema anterior dice en particular que si $x \in P$ entonces existen matchings $M_1, \ldots, M_k$ y coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi^{M_i}$$

En otras palabras, "todo matching perfecto fraccional es combinación convexa de matchings integrales"

Observación 2. Sea $A \in [0,1]^{n\times n}$, matriz doblemente estocástica o sea que $(\forall i,j \in [n]) \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = 1$, es decir que la suma por filas y columnas es 1.

El resultado anterior en su versión matricial nos dice que existen matchings perfectos M_i y coneficientes $\lambda_i \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{n} \lambda = 1$ tal que $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi^{M_i}$.

Teorema 4 (Polítopos de matchings en grafos bipartitos)**.** *Sea $G = (L,R;E)$ un grafo bipartito cualquiera (no necesariamente completo ni balanceado).*

1.
$$P_{matching\ perfecto}(G) = conv\{\chi^M : M \text{ matching perfecto de } G\} = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) = 1, \forall v; x \geq 0\}$$

2.
$$P_{matching}\ (G) = conv\{\chi^M : M \text{ matching de } G\} = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) \leq 1, \forall v; x \geq 0\}$$

Demostración. Llamemos P_1 al polítopo que aparece al lado derecho del primer punto. Veamos que los vértices deP_1 son indicatrices de matchings perfectos. Sea x^* un punto extremo de P_1 y supongamos que x^* no es integral. Consideremos entonces $F = \{e \in E : x^*_e \in (0,1)\}$. Para todo $v \in G$, $d_F(v) \neq 1$ (puede ser 0, 2 o más) pues $x^*(\delta(v)) = 1$. Por lo tanto (V,F) no tiene vértices de grado 1 (y $F \neq \emptyset$), luego existe ciclo $C \subseteq F$. Como G es bipartito, C es par. Llamemos C^+ a las aristas pares y C^- a las impares.

Tomando $x^+_e = x^* + \delta(\chi^{C^+} - \chi^{C^-})$ y $x^-_e = x^* - \delta(\chi^{C^+} - \chi^{C^-})$ donde δ es suficientemente pequeño ($\delta = \text{mín}\{\text{mín}\{x^*_e, 1 - x^*_e\} : e \in C\}$), tenemos que ambos puntos pertenecen a P_1. Además $x^* = \frac{1}{2}(x^+_e + x^-_e)$ lo que es una contradicción con la definición de punto extremo. Concluimos así que P_1 está incluido en $P_{\text{matching perfecto}}(G)$. La otra inclusión es directa del hecho que los vectores indicatrices matchings perfectos de G satisfacen las condiciones de P_1.

La parte 2 queda de ejercicio como controlable. □

En particular, se concluye que si existe un matching fraccional (elemento de $\{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) \leq 1, \forall v; x \geq 0\}$) con $c^T x \leq a$ entonces debe existir un matching entero con $c^T x \leq a$.