MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Juan Marshall, Rodrigo Moreno y Benjamín Ruiz.
Fecha: 29 de Agosto 2014 .

Cátedra 8

1. Complementos sobre Matroides

Revisaremos en algunas otras definiciones y propiedades de matroides para luego pasar a los problemas de largo mínimo.

Definición 1 (Menor de una matroide)**.** Sean M_1, M_2 matroides. M_1 se dice *menor* de M_2 cuando la primera se puede obtener a partir de las operaciones de borrado y contracción sobre la última. Veamos un ejemplo de esto con matroides gráficas.

En la figura a continuación se muestran los grafos G_1 y G_2, donde G_1 se obtiene de borrar y/o contraer las aristas marcadas en el sentido de multigrafo usando que para todo multigrafo G y toda arista e de G, se tiene $M(G)-e = M(G-e)$ y que $M(G/e) = M(G)/e$, concluimos que $M(G_1)$ es menor de $M(G_2)$. Esto permite extender la definición para "menor" en grafos también.

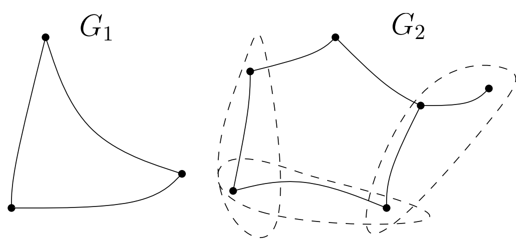

Figura 1: G_1 es menor de G_2

La discusión anterior muestra que la siguiente propiedad de matroides gráficas se .

Proposición 1 (Las matroides gráficas son cerradas para menores.)**.** *Una matroide menor de una matroide gráfica es también una matroide gráfica.*

Uno de los problemas que quedó pendiente de las últimas clases fue encontrar las condiciones suficientes y necesarias para que el algortimo Glotón-Independiente funcionara. Esto se resuelve con el siguiente teorema:

Teorema 1 (Correctitud Glotón-Independiente)**.** *Glotón-Independiente devuelve un conjunto independiente de peso máximo.*

Demostración. Glotón-Independiente es equivalente a Glotón-Base en la matroide $M_+ = M\backslash(E\backslash E^+)$,con E^+ los elementos de E de peso positivo. La correctitud sigue de la de este último algoritmo. □

1.1. Dibujos de un (multi)grafo

Pasemos ahora a estudiar la noción de dibujo de un (multi)grafo. Comenzamos con la defición formal de los que es un dibujo.

Definición 2 (Dibujo)**.** Un *dibujo* de un de un (multi)grafo $G = (V, E)$ es la imagen $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ de una asignación que satisface:

- $v \in V \mapsto \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, inyectiva.

- $e \in E \mapsto \hat{e} \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\hat{e}$ una curva homeomorfa al intervalo $(0,1)$ con los mismos extremos que los asociados a extremos de e.

Veamos algunos ejemplos de dibujos.

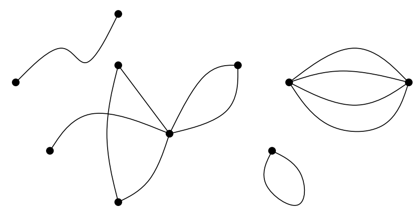

Figura 2: Multigrafo

Como vemos en la figura, algunos dibujos admiten que las imágenes de sus aristas sean disjuntas. Estos se llaman *dibujos planos* y motivan la siguiente definición.

Definición 3 ((Multi)Grafo Planar)**.** Un (Multi)Grafo se dice *planar* si este admite un dibujo plano.

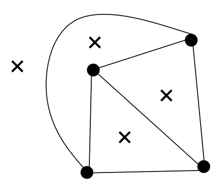

Figura 3: Ejemplo de grafo planar: K_4.

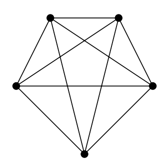

Figura 4: Ejemplo de grafo que no admite dibujo plano: K_5.

Obs 1. Habitualmente denotamos al conjunto de caras como $\hat{F}$.

Al borrar de $\mathbb{R}^2$ todos los puntos de $\hat{V} \cup \hat{E}$ con $\hat{V} = \{\hat{v} \mid v \in V\}$, $\hat{E} = \{\hat{e} \mid e \in E\}$ obtenemos regiones que llamamos caras del dibujo $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$. Estas regiones (marcadas con una cruz en la figura anterior) nos permitirán hablar del dibujo dual que definiremos a continuación.

Definición 4 (Dibujo Dual)**.** Dado $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ un dibujo plano de $G = (V, E)$, realizamos los siguiente:

- Elegir un punto $\hat{v}^*$ de cada cara $\hat{f} \in \hat{F}$.
- Para cada $\hat{e} \in E$ dibujar una arista $\hat{e}^*$ conectando los puntos elegidos en el paso anterior en las caras a ambos lados de de modo que $\hat{e}^*$ intersecte solo a $\hat{e}$.

Obtenemos un dibujo $\hat{G}^* = (\hat{V}^*, \hat{E}^*)$ de un (multi)grafo $G^* = (V^*, E^*)$

A continuación damos un ejemplo de un dibujo dual de un dibujo plano, aquí los vértices del dibujo dual están marcados con un cuadrado rojo y sus aristas las lineas segmentadas, el resto corresponde al dibujo plano original.

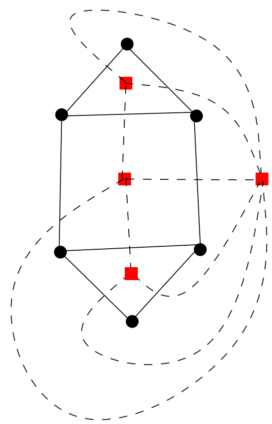

Figura 5: Ejemplo de dibujo dual.

Obs 2. El (multi)grafo del dibujo obtenido resulta ser *un* dual del grafo original, este no necesariamente es único y va a depender de cómo se dibuja el grafo original, como vemos en el siguiente ejemplo, tenemos la misma figura anterior pero dibujada en el plano de una manera diferente, este dibujo produce un dual distinto al anteriomente obtenido.

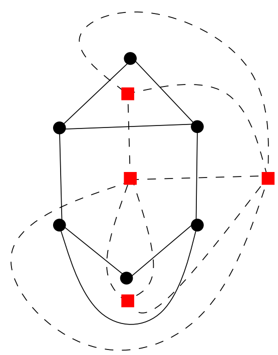

Figura 6: Ejemplo de que el dibujo dual no es único.

Notamos que el grafo dual resultante tiene grado máximo 5, a diferencia de la figura anterior, en donde el grafo tenía grado máximo 6, luego no pueden ser isomorfos.

Proposición 2. *Sea G un grafo y G^* un dual (plano). Entonces $M(G)$ y $M(G^*)$, las matroides asociadas, son duales.*

Demostración. I es independiente en $M(G^*)^* \Leftrightarrow E^* \backslash I^*$ es generador de $M(G^*) \Leftrightarrow cc(G^* \setminus I^*) = cc(G^*) \Leftrightarrow I$ no contiene un ciclo en $G \Leftrightarrow I$ es independiente en $M(G)$.

$\square$

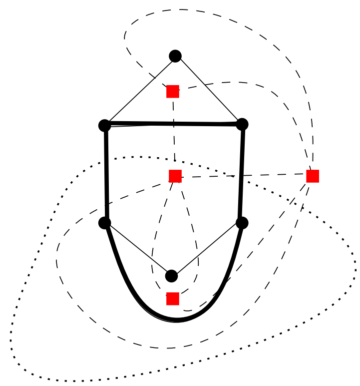

Figura 7: Representación: Un corte en G^* contiene un ciclo en el grafo original G.

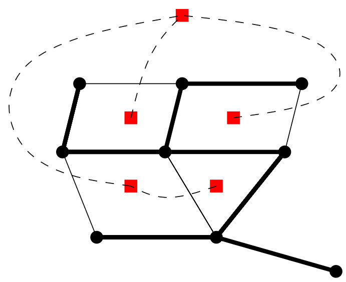

Figura 8: Representación: Los complementos de las base del grafo original son bases del grafo dual.

2. Problema del (Di)Camino de Largo Mínimo

Ahora comenzaremos a ver el problema de encontrar un camino de costo mínimo en un grafo dirigido. Nos interesa, por ejemplo, encontrar un camino que tome el menor tiempo posible, para ir desde un lugar a otro. El tipo de algoritmo que veremos lo utilizan aplicaciones como waze o google maps.

Definición 5. Digrafo, o grafo dirigido.
Un *digrafo* o *grafo dirigido* corresponde a una tupla $G = (V, E)$, donde:

- V y E son conjuntos finitos.
- Los elementos de V se llaman *vértices*.
- Los elementos de E se llaman *arcos*.
- Cada $e \in E$ tiene asociado un nodo de *cola* $t(e) \in V$ y un nodo *cabeza* $h(e) \in V$ (que podrían ser iguales).
- Un arco es representado con una flecha donde la punta de la flecha corresponde a la cabeza del arco.
- Dos arcos con igual cola y cabeza se llaman *paralelos*.
- Dos arcos se dicen *antiparalelos* si la cabeza de uno es la cola del otro y viceversa.
- Un arco se dice *loop* cuando tiene igual cola y cabeza.
- Cuando no hay arcos paralelos, el digrafo se dice *simple*, en tal caso $e = (t(e), h(e)) \in V \times V,\ E \subseteq V \times V$.
- Se definen análogamente a grafos *dipaseo, dicamino y diciclo*, donde la condición extra es que siempre se sigue la dirección del arco.

A continuación algunos ejemplos de digrafos.

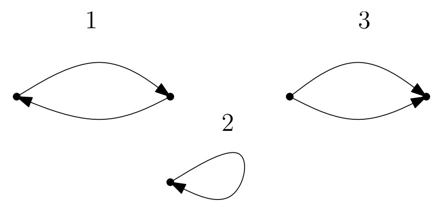

Figura 9: (1) Arcos antiparalelos, (2) un loop y (3) arcos paralelos.

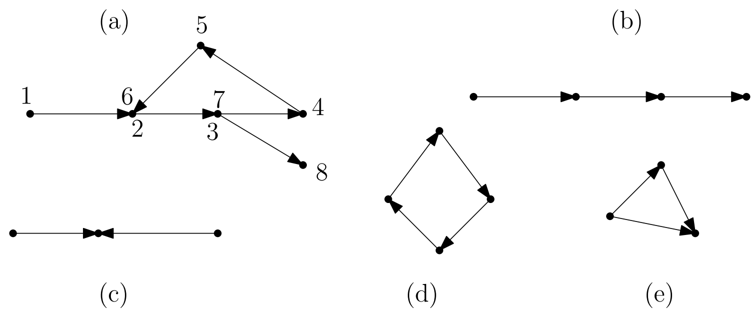

Figura 10: (a) Dipaseo, (b) dicamino, (c) no es dicamino, (d) diciclo, (e) no es diciclo.

Problema del dicamino de largo mínimo

Dado $G = (V, E)$ grafo dirigido, $l : E \to \mathbb{R}$ función de largo, encontrar un dicamino P de s a t de largo mínimo. Esto es $l(P) = \text{mín}\{l(Q) : Q \text{ es dicamino de } s \text{ a } t\}$, donde el largo de un paseo $Q = v_1 v_2 \dots v_k$, es $l(Q) = \sum_{i=1}^{k-1} l(v_i, v_{i+1})$ (Q podría repetir aristas).

Obs 3. En general, encontrar dicaminos de largo mínimo es complicado, de hecho este problema es NP-completo. Esta noción se estudia más a fondo en cursos de complejidad.

Veamos primero unos casos simples:

(1) Encontrar un (s, t)-dipaseo de largo mínimo, cuando los acros pesan lo mismo

Si $l(e) = 1 \ \ \forall e \in E$, se puede resolver con una versión "dirigida" de BFS donde en lugar de ver el corte, vemos las aristas que salen. Naturalmente aparecen "árboles dirigidos", a estos les llamamos *arborescencias*, ver el ejemplo a continuación.

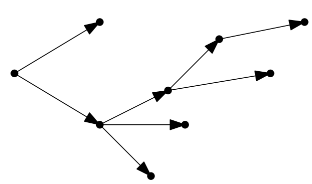

Figura 11: Representación: Arborescencia.

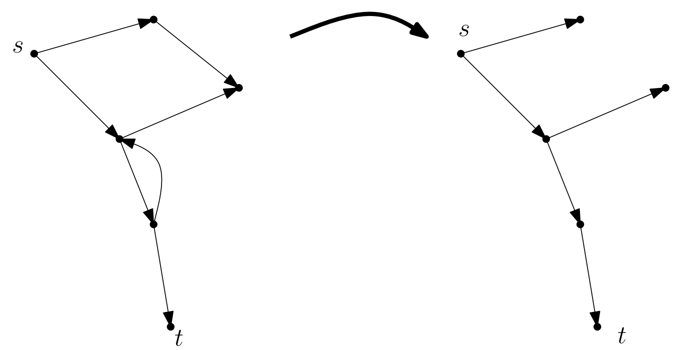

Figura 12: Camino mínimo entre s y t, cuando los arcos tienen el mismo peso usando BFS dirigido a partir de s.

Notación: $\mathcal{W}_{=k}(u,v)$: Conjunto de todos los (u,v)-dipaseos con exactamente k arcos.

(2) Encontrar un (s,t)-dipaseo de largo mínimo, que use exactamente k arcos

Consideremos ahora problema de encontrar un (s,t)-dipaseo de largo mínimo, que use exactamente k arcos. Es decir encontrar $P \in \mathcal{W}_{=k}(u,v)$ tal que $l(P) = \min\{l(Q) : Q \in \mathcal{W}_{=k}(u,v)\} =: D(u,v;k)$, los casos bases son:

- **Si** $k = 0$
  $D(u,v;0) = \begin{cases} 0, & \text{si } u = v. \\ \infty, & \text{si no.} \end{cases}$.
- **Si** $k = 1$
  $D(u,v;1) = \begin{cases} l((u,v)), & \text{si } (u,v) \in E. \\ \infty, & \text{si no.} \end{cases}$.

Obs 4. Si se tiene interés en un (u,v)-dipaseo de cardinalidad k, ¿Cómo se puede encontrar en términos de paseos de menor cardinalidad?

Proposición 3. *Sea $P \in \mathcal{W}_{=k}(u,v)$ de largo mínimo, $k \geq 1$ sea $e = (w,v)$ el último arco. Entonces $P' = P - e \in W_{=k-1}(u,v)$ es de largo mínimo en $W_{=k-1}(u,v)$.*

Demostración. Sea $R \in W_{=k-1}(u,w)$ de largo mínimo, luego $R + e \in \mathcal{W}_{=k}(u,v)$ y entonces $l(R+e) \geq l(P)$. Por otro lado $l(P') = l(P) - l(e) \leq l(R+e) - l(e) = l(R)$ y como tenemos que $P' \in W_{=k-1}(u,w)$, entonces $l(P') = l(P)$ y por tanto P' es óptimo. □

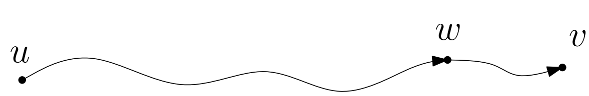

Figura 13: Si $P = (u,v)$-dicamino es de largo mínimo entonces $P - e$, con $e = wv$ es (u,w)-dicamino de largo mínimo.

Notación:

- $N^+(v) = \{w \in V : (v,w) \in E\}$.
- $N^-(v) = \{w \in V : (w,v) \in E\}$.

Una idea para encontrar el dipaseo de largo mínimo de cardinalidad k es ir mirando todos los vecinos, para ser más precisos:

Proposición 4. $D(u,v;k) = \min\{D(u,w;k-1) + l((w,v)) : w \in N^-(v)\}$.

Demostración.

- $(\leq)$ Se tiene pues $D(u, v; k)$ es óptimo.
- $(\geq)$ Por proposición anterior.

$\square$

Por lo que hemos hecho, conviene calcular la "distancia" de s a todos los $v \in V$, y no solo a t. Así se hará un algoritmo basado en programación dinámica, cuyo espíritu es, más o menos, ir guardando datos en tablas, y utilizándolos iterativamente.

Algoritmo 1: Paseos mínimos desde s.

Primero calculamos $D(s, v; 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } u = v. \\ \infty, & \text{si no.} \end{cases}$.

for $j \in \{1, ..., k\}$ **do**
  for $v \in V$ **do**
    $D(s, v; j) = \text{mín}\{D(s, w; j-1) + l(w, v) : w \in N^-(v)\}$.
    $\pi(s, v; j) = \text{argmín}\{D(s, w; j-1) + l(w, v) : w \in N^-(v)\}$ (null si no existe).
  end
end

Obs 5. Notamos que π guarda los precursores, de modo que el penúltimo nodo del (s, t)-camino encontrado por el algoritmo es $v_k := \pi(s, t, k)$, el anterior a ese es $v_{k-1} = \pi(s, t; k-1)$ y en general el i-ésimo nodo del camino es $v_i = \pi(s, t; i)$.