MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Francisco Fernández, Emilien Garcia y Nicolás Troncoso.
Fecha: 25 de Agosto 2014 .

Cátedra 7

1. Dualidad de matroides

En la clases anteriores, vimos la utilidad de estudiar matroides, ya que en éstas el algoritmo Glotón-Base funciona sin falla. También vimos algunas operaciones sobre matroides que permiten obtener nuevas matroides a partir de las originales. Después de repasar las operaciones vistas en la última clase, vamos a definir una nueva operación sobre matroides.

1. *Truncación a tamaño* $t \in \mathbb{N}$: sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide. Se define la *truncación* de M a tamaño t como

$$M^t = (E, \mathcal{I}^t),$$

   donde $\mathcal{I}^t = \{I \in \mathcal{I} : |\mathcal{I}| \leq t\}$.

2. *Unión disjunta o suma directa*: sean $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ dos matroides tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Se define la *suma directa* de M_1 y M_2 como:

$$M_1 \oplus M_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{I}_{12}),$$

   donde $\mathcal{I}_{12}$=$\{I \subseteq E_1 \cup E_2 : \; I \cap E_1 \in \mathcal{I}_1, \; I \cap E_2 \in \mathcal{I}_2\}$.

3. *Borrado de Matroides*: sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $X \subseteq E$. Se define la *matroide borrando* X como:

$$M \setminus X = (E \setminus X, \{I \in \mathcal{I} : \; I \subseteq E \setminus X\}).$$

4. *Contracción de Matroides*: sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $X \subseteq E$. Se define la *contracción*:

$$M/X = (E \setminus X, \mathcal{I}_{M/X}),$$

   donde $\mathcal{I}_{M/X}$ se calcula de la siguiente forma:

   - Elegir B una base cualquiera de X.
   - $\mathcal{I}_{M/X} = \{J \subseteq E \setminus X : J \cup B \in \mathcal{I}\}$.

Definición 1 (Generador de E)**.** Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide.

$$F \subseteq E \text{ es } \textit{generador de } E \;\Leftrightarrow F \text{ contiene una base de E } (\Leftrightarrow Span_M(F) = E)$$

Definición 2 (Dual de una Matroide)**.** Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide. Se define el *dual de* M como $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$, donde:

$$\mathcal{I}^* = \{I \subseteq E : E \setminus I \text{ es generador en } M\}.$$

Ejemplo 1. Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo. Si M es la matroide gráfica de G entonces:

$$\begin{aligned} I \in \mathcal{I}^* &\Leftrightarrow E \setminus I \text{ es generador en } M \\ &\Leftrightarrow (E \setminus I) \text{ contiene una base de } M \text{ (i.e. un árbol generador de } M) \\ &\Leftrightarrow \text{ las componentes conexas de } (G \setminus I) \text{ son las mismas que las de } G. \end{aligned}$$

En el caso conexo:

$$I \in \mathcal{I}^* \Leftrightarrow (G \setminus I) \text{ es conexo.}$$

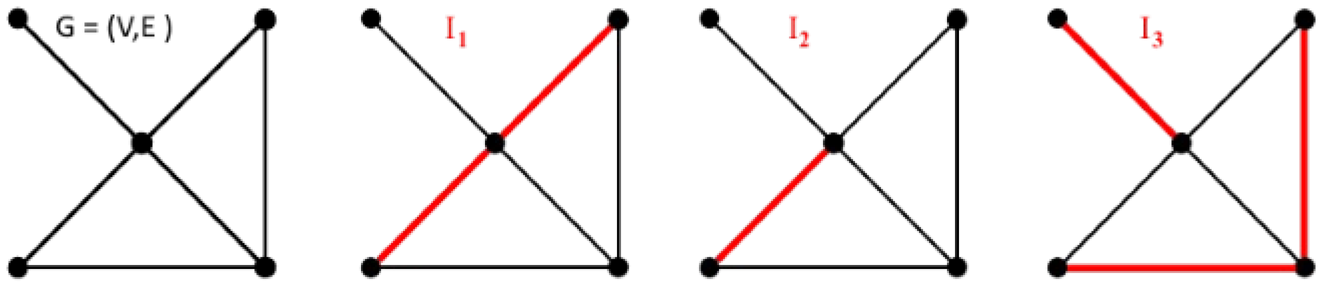

Figura 1: $G = (V, E)$ siendo el grafo de la izquierda, en cada grafo que sigue se definen los conjuntos I_i como los conjuntos de las aristas rojas. En los dos primeros casos, las aristas negras generan a E, por lo tanto I_1 e I_2 son conjuntos independientes de M^* ; sin embargo, el tercer conjunto de aristas negras no es un subgrafo generador de E, por lo tanto $I_3 \notin \mathcal{I}^*$.

Definición 3 (Cográfico)**.** La matroide dual M^* de una matroide gráfica se llama *cográfica.*

Proposición 1. *Los siguientes son equivalentes:*

- *B es base de M^*.*
- *$(E \setminus B)$ es generador de M de cardinalidad máxima.*
- *$(E \setminus B)$ es base de M.*

Corolario 1. *$(M^*)^* = M$.*

Ejercicio 1. (Propuesto) Encontrar la matroide dual de una matroide vectorial (o matroide de representables).

Lema 1. *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide. M^* el dual de M es matroide.*

Dem. Veamos que M^* es matroide.

- $\emptyset \in \mathcal{I}^*$, pues $E = E \setminus \emptyset$ genera a E.
- Sean $J \in \mathcal{I}^*$, $I \subseteq J$. Como $J \in \mathcal{I}^*$ se tiene que $(E \setminus J)$ genera a E. $(E \setminus I) \supseteq (E \setminus J)$ luego $(E \setminus I)$ tambien genera a E, es decir $I \in \mathcal{I}^*$.
- (*Aumento*) Sean I, $J \in \mathcal{I}^*$ con $|I| < |J|$. Sea B $base_M$ de E, con $B \subseteq (E \setminus J)$. Como $(B \setminus I) \subseteq B \in \mathcal{I}$ tenemos que $(B \setminus I) \in \mathcal{I}$. Además $I \in \mathcal{I}^*$, por lo que $\exists B_0 \subseteq (E \setminus I)$ $base_M$ de E. Se tiene que $(B \setminus I) \in \mathcal{I}$ y mediante aumento en M se puede hacer crecer $(B \setminus I)$ a una $base_M$ B de E añadiéndole elementos de B_0 $base_M$ de E. Llamemos B' al resultado de este proceso. B' cumple:
$$(B \setminus I) \subseteq B' \subseteq (E \setminus I).$$

  Obs: Como $|B'| = |B|$ (pues ambos son $bases_M$), se agregaron a la base la misma cantidad de elementos que se quitaron al principio, es decir:
$$|B' \setminus (B \setminus I)| = |B \cap I| \leqslant |I \setminus J| < |J \setminus I|.$$

  Luego $B' = (B \setminus I) \cup (B' \setminus (B \setminus I))$ (los elementos que se quitaron más los elementos agregados). Como los elementos agregados son menos que $|J \setminus I|$, se tiene que $\exists z \in J \setminus I$ que no fue agregado, es decir $\exists z \in (J \setminus I) \setminus B'$ tal que $B' \subseteq E \setminus (I + z)$ y así $I + z \in \mathcal{I}^*$.

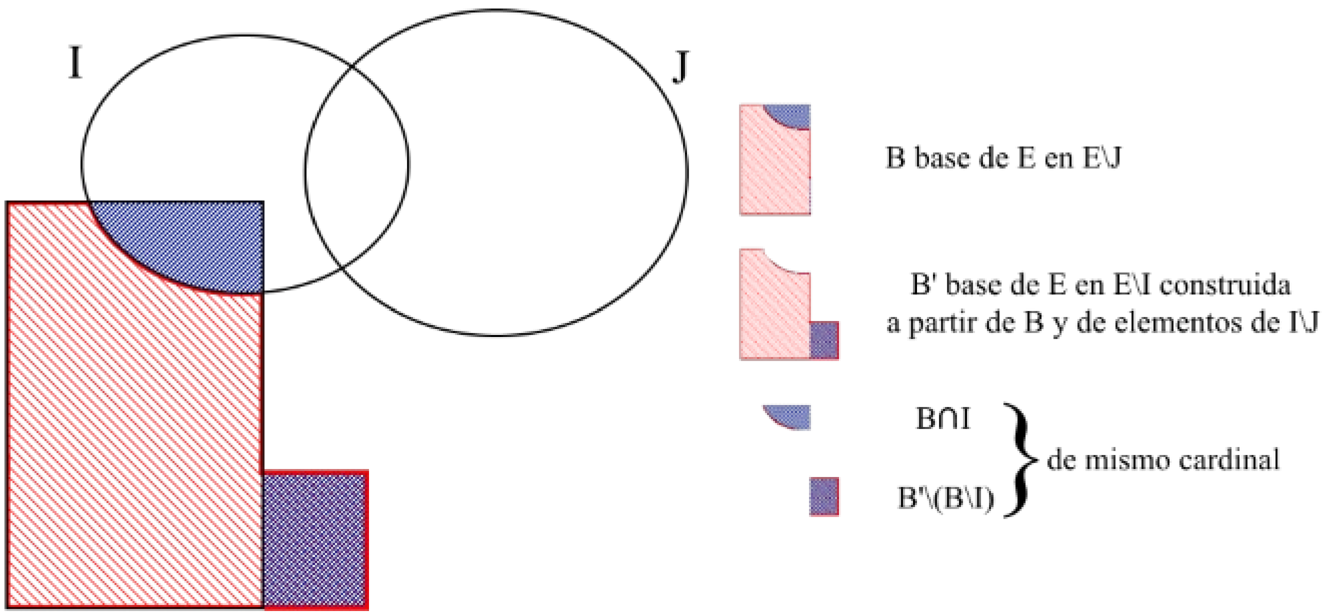

Figura 2: Esquema para ilustrar la manera de construir la base B' de E a fuera de $I \cup J$. Empezamos con elementos de la base B (que está a fuera de J), y le sacamos todos sus elementos que están también en I. Luego, usando aumento en la matroide, le agregamos los elementos necesarios para obtener B'.

Observación 1. Si dos matroides $M = (E,\mathcal{I})$ y $M' = (E,\mathcal{I}')$ cumplen cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$.
2. B es base en M $\Leftrightarrow$ B es base en M' .
3. C es circuito en $M \Leftrightarrow C$ es circuito en M'.
4. $\forall X \subseteq E$, $Span_M(X) = Span_{M'}(X)$.
5. $\forall X \subseteq E$, $r_M(X) = r_{M'}(X)$.

Entonces son iguales ($M = M'$).

Dem. Con $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$, se tiene el resultado, luego basta escribir el conjunto de independientes en función de uno de los criterios anteriores para demostrar la igualdad de matroides. Aquí se presentan algunas caracterizaciones a modo de demostración.

- $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : \exists B$ base tal que $F \subseteq B\}$.
- $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F$ no contiene ningun circuito $C\}$.
- $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : r_M(F) = |F|\}$.
- $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : \forall x \in F, Span(F) \supsetneq Span(F - x)\}$.

2. Operación Con Dualidad

Lema 2. *Se tienen las siguentes identidades con la función rango:*

1. $r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M(E)$.
2. $r_{[M^* \setminus F]^*}(X) = r_M(F \cup X) - r_M(F)$.
3. $r_{M/F}(X) = r_M(F \cup X) - r_M(F)$.

Dem.

1. Por definición de matroide dual:

$$\begin{aligned} r_{M^*}(X) &= \max\{|X \cup B| : B \textit{ es base de } M^*\} \\ &= \max\{|X \setminus B| : B \textit{ es base de } M\} \\ &= |X| - \min\{|X \cap B| : B \textit{ es base de } M\} \\ &= |X| - \min\{|B| - |B \setminus X| : B \textit{ es base de } M\} \\ &= |X| - |B| + \max\{|B \setminus X| : B \textit{ es base de } M\}. \end{aligned}$$

Sabemos que todas las bases tienen el mismo cardinal dado por $r_M(E)$, luego:

$$\begin{aligned} r_{M^*}(X) &= |X| - r_M(E) + \max\{|B \cap (E \setminus X)| : B \textit{ es base de } M\} \\ &= |X| - r_M(E) + r_M(E \setminus X). \end{aligned}$$

2. Utilizando la identidad anterior:

$$\begin{aligned} r_{[M^* \setminus F]^*}(X) &= |X| - r_{M^* \setminus F}(E \setminus F) + r_{M^* \setminus F}((E \setminus F) \setminus X) \\ &= |X| - r_{M^*}(E \setminus F) + r_{M^*}((E \setminus (F \cup X)) \\ &= |X| - \big[|E \setminus F| - r_M(E) + r_M(F)\big] + \big[|E \setminus (F \cup X)| - r_M(E) + r_M(F \cup X)\big] \\ &= -r_M(F) + r_M(F \cup X). \end{aligned}$$

En esto último se ocupó que $|X| - |E \setminus F| + |E \setminus (F \cup X)| = 0$.

3. Sea A un conjunto independiente de $(M \setminus F)$ maximal dentro de X:

$$\begin{aligned} r_{M/F}(X) &= |A| = |B_F \cup A| - |B_F| \\ &= r_M(F \cup A) - r_M(F) \\ &= r_M(F \cup X) - r_M(F). \end{aligned}$$

Lema 3. *Si $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $F \subseteq E$, $M/F = (M^* \setminus F)^*$.*

Dem. Demostremos este lema utilizando el rango. De las partes 2 y 3 del lema anterior:

$$r_{M/F}(X) = r_M(F \cup X) - r_M(F) = r_{[M^* \setminus F]^*}(X).$$

Luego $r_{M/F}(X) = r_{[M^* \setminus F]^*}(X)$ y por observación 1, son iguales.

3. Matroide Gráfica

Proposición 2. *Sean* $M = (E, \mathcal{I})$ *matroide,* $F_1, F_2 \subseteq E$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$*:*

- $(M/F_1) \setminus F_2 = (M \setminus F_2)/F_1$.
- $M \setminus (F_1 \cup F_2) = (M \setminus F_1) \setminus F_2$.
- $M/(F_1 \cup F_2) = (M/F_1)/F_2$.

Dem. Ejercicio.

¿Qué significa la contracción en una matroide gráfica? Sea G un multigrafo cualquiera. De la *Figura 3* podemos observar que hay dos casos:

- Si e no es loop:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & M/e = (E - e, \{F \subseteq E - e : F + e \in \mathcal{I}\}) \\ & G/e = ((V \setminus \{u, v\}) + w_{uv}, E'/e). \end{aligned}$$

  Donde $\forall f \in E - e$ con $f = ab$ definimos $f' \in E'$ como sigue:

$$f' = \begin{cases} ab & \text{si } \{a, b\} \neq \{u, v\} \\ w_{uv}b & \text{si } a \in \{u, v\} \text{ y } b \notin \{u, v\} \\ w_{uv}a & \text{si } b \in \{u, v\} \text{ y } a \notin \{u, v\} \\ w_{uv}w_{uv} & \text{si } a \in \{u, v\}, b \in \{u, v\} \end{cases}$$

- Si e es loop $\Rightarrow M/e = M \setminus e$, es decir, basta borrarla para obtener la contracción.

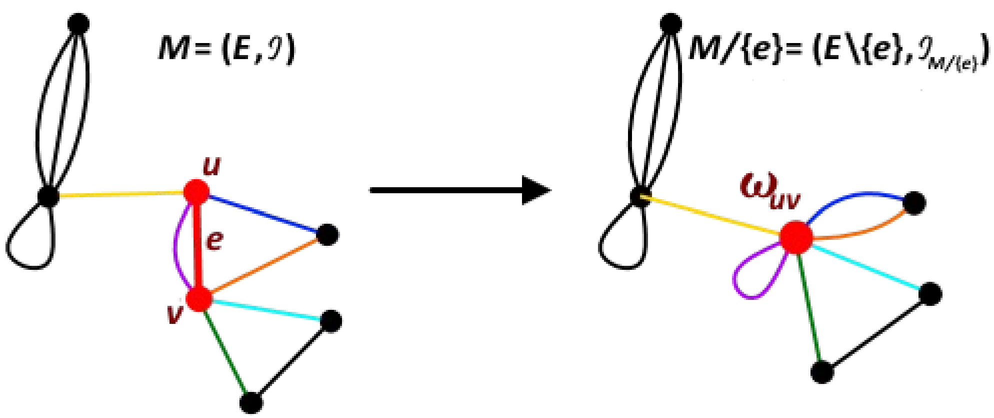

Figura 3: A la izquierda está la matroide M original, con colores distintos para cada arista incidente a u o v, y de hecho se puede notar mejor lo que les ocurre durante la contracción de M. En rojo están la arista e que vamos a sacar de M y sus vértices. A la derecha se encuentra la matroide M/e contraida. De esta manera se puede notar bien porque se llama contracción de una matroide.