MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): David Cares, Obed Ulloa y Yasser Nanjari.
Fecha: 18 de Agosto 2014 .

Cátedra 6

1. Recuerdo de Matroides

La noción de matroide, será de mucha utilidad para el estudio de grafos y algoritmos, pues nos permitirá definir nuevos algoritmos como el glotón-base, y asegurar el funcionamiento de estos.

Recordemos la definición de una matroide:

Definición 1 (Matroide)**.** Una matroide es un *par hereditario* $M = (E, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{P}(E)$ es el conjunto de los independientes, esto es, tal que cumple:

(i) $\mathcal{I} \neq \phi$ (dado el punto (ii) esto es equivalente a: $\phi \in \mathcal{I}$).

(ii) $X \in \mathcal{I}$, $Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \mathcal{I}$.

Y además satisface cualquiera de los siguientes axiomas equivalentes:

- *(Aumento)* $X, Y \in \mathcal{I}$, $|X| < |Y| \Longrightarrow \exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$.
- *(Aumento débil):* $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y \setminus X| = 2, |X \setminus Y| = 1 \Longrightarrow \exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$.
- *(Cardinalidad de las Bases):* $\forall F \subseteq E$, las bases de F tienen el mismo cardinal.

El siguiente lema, tendrá una especial utilidad en las primeras partes de los contenidos del curso, en lo que respecta al uso de matroides, pues será necesario probar que ciertos conjuntos serán o no matroides, para lo cual, tanto el Aumento débil y La cardinalidad de las bases nos serán muy útiles.
A continuación demostraremos la equivalencia de estos tres axiomas.

Lema 1. *(Aumento) ⇔ (Cardinalidad de las Bases) ⇔ (Aumento débil).*

Dem.

- *(Aumento)⟹ (Cardinalidad de las Bases)*. Por contradicción: Sea F tal que X, Y son bases de distinto cardinal, supongamos sin pérdida de generalidad que $|X| < |Y|$. Luego, por *(Aumento)*, $\exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$ pero, $X + z \subseteq F$, lo que contradice el hecho que X es base de F.
- *(Cardinalidad de las Bases)⟹ (Aumento Débil)*. Sean $I, J \in \mathcal{I}$ tales que:
  $|I \setminus J| = 1, |J \setminus I| = 2$
  - *Si* $I \cup J \in \mathcal{I} \Longrightarrow$ cualquier $z \in J \setminus I$ es tal que $I + z \in \mathcal{I}$.
  - *Si* $I \cup J \notin \mathcal{I} \Longrightarrow J$ es base de $I \cup J$ por lo tanto todas las bases de $I \cup J$ tienen cardinal $|J|$. Como $I \in \mathcal{I}$, I esta incluido en alguna base de $I \cup J$.
    Recordando que $|I| = |J| - 1$, pues $|I \setminus J| = 1$.
    Tenemos que existe un elemento $z \in (I \cup J) \setminus J = J \setminus I$, que podemos agregar a I para que, en particular, sea base $I + z$.
    $I + z \in \mathcal{I}$.
- *(Aumento Débil)⟹ (Aumento)*. Esta demostración quedó pendiente en clases, pero el profesor la publicó en U-cursos.
  Sean I, J conjuntos independientes tales que $|I| < |J|$.
  Aplicaremos inducción sobre $k = |I \setminus J|$ (en clase se usó $|J \setminus I|$).
  - *Si* $k = 0$. Directo, pues $|I \setminus J| = 0 \Longrightarrow I \subseteq J$

- *Si* $k \geq 1$. Sea $x \in I$, por inducción en $I - x$ y J se tiene que existe $z \in J \setminus (I - x) = J \setminus I$, tal que $I - x + z$ es independiente, luego usando nuevamente la hipótesis de inducción en $I - x + z$, pues $|I + x - z \setminus J| = k - 1$, existe $w \in J \setminus (I - x + z)$ que hace a $K = I - x + z + w$ independiente.
  Se tiene que $|K \setminus I| = 2$ y $|I \setminus K| = 1$. Usando aumento débil existe $y \in K \setminus I = \{x, w\}$ tal que $K + y$ es independiente. □

La clase pasada se demostró que si M es matroide, entonces Glotón-base encuentra una base de peso máximo (para toda función $w : E \to \mathbb{R}$ de peso). Esto, de hecho, es una doble implicancia (si y solo si), como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1. *Si $M = (E, \mathcal{I})$ es un par hereditario que no es matroide, entonces existe una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ tal que Glotón-base no devuelve una base de peso máximo de E (i.e. Glotón-base falla).*

Observación 1. También se puede decir que todo *par hereditario* $(E, \mathcal{I})$ que no es matroide, posee una función de peso para la cual Glotón-base falla.

Dem. Como M no es matroide, entonces $\exists I, J$, $|I| < |J|$ tales que $\forall z \in J \setminus I$, $I + z \notin \mathcal{I}$ (ya que al no ser matroide, no se cumple el Ax. de Aumento). Luego, sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < b < a$, se define $w : E \to \mathbb{R}$ de la siguente forma:

$$w(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin I \cup J \\ a & \text{si } e \in I \\ b & \text{si } e \in J \setminus I \end{cases}$$

Así, Glotón devuelve I unión de elementos de peso 0; luego el peso del conjunto obtenido es $w(I) = a|I|$.

Si $b = a - \varepsilon$, con ε suficientemente pequeño, podemos obtener que:

$$w(J) = a|J \cap I| + b|J \setminus I| = a|J \cap I| + (a - \varepsilon)|J \setminus I| = a|J| - \varepsilon|J \setminus I| > w(I).$$

Por lo tanto; Glotón-Base entrega una base de peso no máximo, por lo que falla. □

Teorema 2. *Las matroides son exactamente aquellas estructuras donde Glotón-base funciona.*

2. Notación

Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide

- Independiente: $X \in \mathcal{I}$
- Dependiente: $X \notin \mathcal{I}$
- Base: $I \in F \subseteq E$ tal que I es subconjunto maximal y $I \in \mathcal{I}$
- Circuito: $C \in E$ minimamente dependiente ($C \notin \mathcal{I}$ y $\forall J \subsetneq C$, $J \in \mathcal{I}$).
- $\forall X \subseteq E$ ($X \in \mathcal{P}(E)$), se definen:
  - **rango** de X: $r(X) = Max\,\{|I| : I \subseteq X,\, I \in \mathcal{I}\} \in \mathbb{N}$
  - **generado** por X: $span_M(X) = \bigcup \{Y \supseteq X : r(Y) = r(X)\}$
    Observación 2. la definición de $span(X)$ es equivalente a: $e \in span(X) \iff ((e \in X) \vee (r(X + e) = r(X)))$

Ejemplo 1. Si en el grafo a continuación, $X \in 2^E$ corresponde a las aristas rojas, tenemos que $span(X) = X + 3$

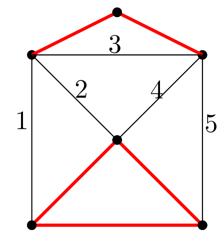

Figura 1: $span(X) = X + 3$

Observación 3. Tras lo visto, el algoritmo Glotón-Base se puede escribir de la siguente forma:

Algoritmo 1: Glotón-Base(max)

Entrada: $G = (E, \mathcal{I})$ hereditario, $w : E \to \mathbb{R}$.
Ordenar $E = \{e_1, ..., e_m\}$ de mayor a menor peso.
$F \leftarrow \varnothing$
for $i = 1 \ldots m$ **do**
  if $e_i \notin span(\{e_1, ..., e_{i-1}\})$ **then**
    $F \leftarrow F + e_i$
  end
end
return F

Observación 4. La condición $e_i \notin span(\{e_1, ..., e_{i-1}\})$ es equivalente a:

- $e_i \notin span(F)$
- $F + e_i \in \mathcal{I}$ $(F \in \mathcal{I})$

(esto es, bajo el supuesto que notando que se satisface el invariante que al principio de la iteración i, F es base de $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$).

Ejemplo 2. Sea un grafo como el que se muestra a continuación, con los respectivos pesos de cada arista:

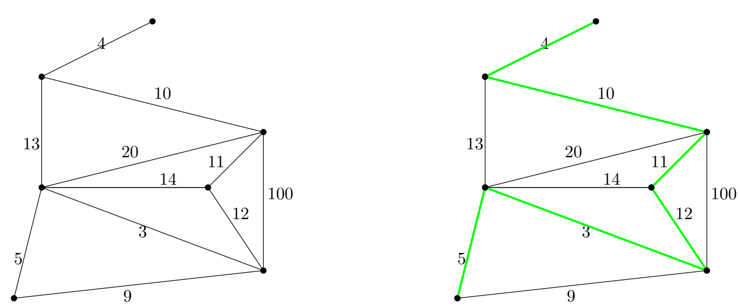

Figura 2

Luego de aplicar el algoritmo, las aristas que éste agrega son las marcadas en verde en la figura. Podemos ver que, por ejemplo, la arista de peso 20 no es agregada pues es generada por las aristas de peso 10 y 13; ya que, para ser agregado por el algoritmo, el peso de la artista no puede ser generado por aristas de peso menor. En el mismo ejemplo, ahora si agregamos una arista e, como se ve en la figura, el peso de esta debe ser menor estricto que 12 o menor o igual que $12 - \varepsilon$ (pues las aristas 3,5,12,11 y 10 generan la arista e).

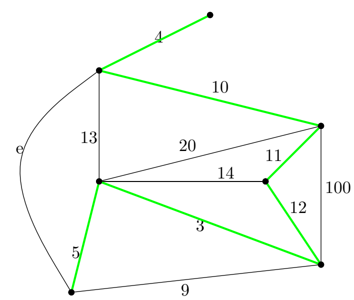

Figura 3

3. Operaciones en Matroides

En este sección introduciremos las siguientes operaciones con matroides, las cuales nos servirán en muchos casos para las previa demostración de si un par hereditario es o no matroide y nos permitirán además construir nuevos tipos de matroides.Estas operaciones son:

1. Truncación a tamaño $t \in \mathbb{N}$: sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide. Se define la truncación de M a tamaño t como

$$M^t = (E, \mathcal{I}^t),$$

donde $\mathcal{I}^t = \{X \in \mathcal{I} : |X| \leq t \}$.

Proposición 1. *M^t es matroide.*

Dem. Es fácil ver que $(E, \mathcal{I}^t)$ es un par hereditario, pues $\mathcal{I}^t \subseteq \mathcal{I}$ y $(E, \mathcal{I})$ es par hereditario. Sean ahora $I, J \in \mathcal{I}^t$ tales que $|I| < |J|$. Como $I, J \in \mathcal{I}^t \subseteq \mathcal{I}$, $\exists e \in J \setminus I$ tal que $I + e \in \mathcal{I}$. Como $|I| < |J| \leq t$, $|I + e| = |I| + 1 \leq t$. Luego $I + e \in \mathcal{I}^t$, con lo cual se satisface *(Aumento)*. □

Ejemplo 3. Sea M una matroide de partición, con $(E_1, \ldots, E_k)$ las partes y $(c_1, \ldots, c_k)$ las cotas. Luego:

$$\mathcal{I}(M^t) = \{X \subseteq E : \; |X \cap E_i| \leq c_i \forall i = 1, \ldots, k, \; |X| \leq t\}.$$

2. Unión disjunta o suma directa: sean $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ dos matroides tales que $E_1 \cap E_2 = \phi$. Se define la suma directa de M_1 y M_2 como

$$M_1 \oplus M_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{I}_{12}),$$

donde $\mathcal{I}_{12} = \{I \subseteq E_1 \cup E_2 : \; I \cap E_1 \in \mathcal{I}_1, \; I \cap E_2 \in \mathcal{I}_2 \}$.

Observación 5. Notar que, en general, $\mathcal{I}_{12} \neq \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$

Proposición 2. *$M_1 \oplus M_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{I}_{12})$ es matroide.*

Dem. Propuesto.

Definición 2 (Matroide laminar)**.** Una matroide laminar es aquella matroide que se obtiene de sumas directas y truncaciones de matroides uniformes ($\mathcal{I} = \{X \subseteq E : \; |X| \leq t\}$).

Observación 6. Las matroides uniformes se pueden ver como las matroides de partición con una parte, o bien como truncaciones de las matroides triviales ($\mathcal{I} = \mathcal{P}(E)$).

3. Borrado de Matroides: sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $X \subseteq E$. Se define la Matroide borrando X como

$$M \setminus X = (E \setminus X, \{I \in \mathcal{I} : \; I \subseteq E \setminus X\}).$$

Proposición 3. *$M \setminus X$ es matroide.*

Dem. Propuesto.

4. Contracción de Matroides: sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $X \subseteq E$. Se define la contracción

$$M/X = (E \setminus X, \mathcal{I}_{M/X}),$$

donde $\mathcal{I}_{M/X}$ se calcula de la siguiente forma:

- elegir B una base cualquiera de X.
- $\mathcal{I}_{M/X} = \{J \subseteq E \setminus X : \; J \cup B \in \mathcal{I}\}$.

Proposición 4. *M/X es matroide.*

Dem. Propuesto.

Ejemplo 4. Sea G un grafo, X un ciclo de G y B una base de X, como se muestra en la figura **??**. Sea M la matroide gráfica asociada a G. Luego los conjuntos independientes de M/X serán todos los conjuntos J tales que $J \cup B$ no tiene ciclos. Es fácil notar de la figura que $J = \{1\}$ y $J' = \{1, 2\}$ son independientes de la contracción M/X.

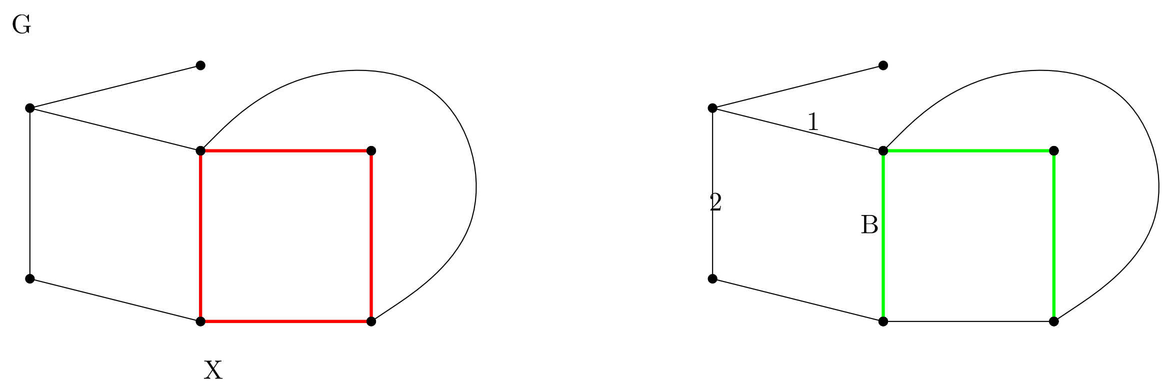

Figura 4: X es un ciclo del grafo G (representado con aristas rojas) y B es una base de X (aristas verdes).