

AUXILIAR 10: ESTIMACIÓN

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTIN CASTILLO & JOSÉ CERECEDA

24 DE OCTUBRE DE 2014

Resumen

1. Error cuadrático medio de $\hat{\theta}$:

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2)$$

Proposición.

$$\begin{aligned} ECM(\hat{\theta}) &= Var(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}^2(\hat{\theta}) \\ &= Var(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 \end{aligned}$$

Un estimador se dice insesgado si $\text{Sesgo}(\hat{\theta})=0$, ie, $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.

2. Consistencia: $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon$$

3. Método de los momentos: Sea X v.a. y $X_1, \dots, X_n$ m.a.s.

Se define el momento “teórico” de orden k como: $M_k = \mathbb{E}(X^k)$, y el momento “muestral” de orden k como: $m_k = \frac{\sum X_i^k}{n}$.

Problemas

P1. Sea $X_1, \dots, X_n$ m.a.s. de X , con $\mathbb{E}(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Sea además $S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

a) Mostrar que $S^2 = \hat{\sigma}^2$ es insesgado.

b) Mostrar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Considerar sólo el caso $n = 2$.

c) Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Considere $S_c^2 = c \sum (X_i - \bar{X}) = \hat{\sigma}^2$.

Determine c para minimizar

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = \mathbb{E}((\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2) = \underbrace{(\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2)^2}_{S^2(\hat{\sigma}^2)} + Var(\hat{\sigma}^2)$$

P2. Sea $X \sim G(r, \alpha)$, y $X_1, \dots, X_n$ m.a.s.

(i) Muestre que el estimador de los momentos de α , para r conocido, es $\hat{\alpha} = \frac{r}{\bar{X}}$.

- (ii) Muestre que el estimador de los momentos de $\lambda = 1/\alpha$, para r conocido, es $\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{r}$. Encuentre además la distribución muestral de $\hat{\lambda}$ para n grande.
- (iii) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}$ para α .

P3. Se quiere estimar la vida útil de ciertos dispositivos usados para tomar mediciones en la Antártica. Por razones climáticas se puede ir a la zona solo una vez al año. Si se instalaron n dispositivos y al volver, después de un año, se encuentra que k de ellos ya no están funcionando. Suponiendo que la vida útil de los dispositivos son v.a. iid Exponencial:

- a) Encuentre una función de Verosimilitud adecuada para el problema y sus datos.
- b) Calcule el Estimador Máximo Verosímil (EMV) de la parte anterior.
- c) Ocupe la propiedad de Invarianza del EMV y concluya.

P4. Muestre que si $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ es consistente.