Auxiliar 9

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & Jose Cereceda
24 de octubre de 2014

Resumen

Teorema central del límite (TCL)

Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.'s $i.i.d.$ Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i),\ \sigma^2 = Var(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y $Var(S_n) = n\sigma^2$, y:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1) \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

donde $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ cuando $X \sim N(0,1)$, valor que se obtiene de la tabla.

Ley de los grandes números

La **ley débil de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, ...$ es una sucesión infinita de v.a.'s $i.i.d.$ de valor esperado μ y varianza σ^2, entonces el promedio

$$\overline{X_n} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$$

converge en probabilidad a μ, esto es,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1$$

La **ley fuerte de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, ...$ es una sucesión infinita de v.a.'s $i.i.d.$ que cumplen $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$, y tiene valor esperado μ entonces, el promedio de las variables aleatorias converge a μ casi seguramente, esto es,

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} |\overline{X_n}| = \mu) = 1$$

1. Problemas

1. Sean $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2),\ X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere

$$Z(t) = X_1 cos(wt) + X_2 sen(wt),\ V(t) = \frac{dZ}{dt}(t)$$

   Determine la distribución de $Z(t)$ y $V(t)$ (w fijo).

2. Pruebe usando el Teorema Central del Límite, que se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

3. Al sumar números un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos que todos los errores de aproximación son independientes y distruidos uniformemente en $(-0{,}5, 0{,}5)$.

   a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

   b) ¿Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad de 0.9?

4. Considere el siguiente método muy rudimentario para calcular π. Sea el experimento que consiste en elegir un punto p al azar en el cuadrado unitario. Definimos X v.a. que vale 1 si p esta a una distancia menor de $1/2$ del centro del cuadrado y vale 0 sino.

   a) Determine que distribución tiene X y calcule su(s) parámetro(s).

   b) Use el método de los momentos para encontrar un estimador $\hat{\pi}_n$ de π.

   c) Use la Ley de los Grandes Números para mostrar que $\hat{\pi}_n$ es consistente ($\hat{\pi}_n \to \pi$).

   d) Use el Teorema Central del Limite para determinar la cantidad de puntos necesarios para asegurar que $|\hat{\pi}_n - \pi| < 10^{-4}$, con una certeza del 90 %.