Control 2

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martín Castillo & José Cereceda
13 de octubre de 2014

P1. *a)* Sea (X,Y) vestor aleatorio tal que

$$f_{X,Y} = 8xy \qquad 0 < y < x < 1$$

Calcule $\mathbb{E}\left(X|Y\right), \mathbb{E}\left(Y|X\right)$, son X,Y independientes?
Solución: Por definición $f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}}{f_Y}$, y para obtener $f_Y(y)$ integramos sobre el dominio de X

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_y^1 f_{X,Y}(x,y)dx \\
&= \int_y^1 8xydx \\
&= 8y \cdot (\frac{1}{2}x^2)\Big|_{x=y}^{x=1} \\
&= 4(y - y^3)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X|Y=y\right) &= \int_y^1 x\frac{f_{X,Y}}{f_Y}dx \\
&= \int_y^1 x\frac{2xy}{y-y^3}dx \\
&= 2\frac{1}{1-y^2} \cdot (\frac{1}{3}x^3)\Big|_{x=y}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3}\frac{1-y^3}{1-y^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para obtener $\mathbb{E}(Y|X)$ primero calculamos f_X

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_0^x 8xydy \\
&= 8x\ (\frac{1}{2}y^2)\Big|_{y=0}^{y=x} \\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y|X=x\right) &= \int_0^x y\frac{f_{X,Y}}{f_X}dy \\
&= \int_0^x y\frac{8xy}{4x^3}dy \\
&= \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=x} \\
&= \frac{2}{3}x
\end{aligned}$$

Finalmente X, Y no son independientes.

b) Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda perfecta. Se denomina *run* a una secuencia maximal de caras consecutivas. Por ejemplo la secuencia *ccscssccccscsssc* tiene 5 *runs*. Muestre que el número esperado de *runs* es $\frac{n+1}{4}$
Indicación: Denote por $X_i(i=1...n)$ v.a. que determine la $i-$ ésima posición donde comienza un *run*. ¿Son estas v.a. independientes?
Solución: Si definimos la v.a. según la indicación, para X_i v.a. que indica si en la i-ésima posición comienza un run, veamos que para que comienze un run es necesario que en el lanzamiento $i-1$ salga un sello, y en el lanzamiento i salga una cara, como cada lanzamiento es independiente el uno del otro, esto ocurre con probabilidad $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ luego para $i\in\{2,..,n\}$ se tiene que

$$X_i = \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(X_i=1)=1/4 \\ 0 & \mathbb{P}(X_i=1)=3/4 \end{cases}$$

y para $X_1 = \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(X_i=1)=1/2 \\ 0 & \mathbb{P}(X_i=1)=1/2 \end{cases}$
Luego, el número de runs en n lanzamientos, viene dado por $X=\sum_{i=1}^n X_i$, y en virtud de la linealidad de $\mathbb{E}$ se tiene que el número esperado de runs es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= \mathbb{E}(\sum X_i) \\
&= \mathbb{E}(X_1)+\sum_{i=2}^n \mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{2}+\sum_{i=2}^n\frac{1}{4} \\
&= \frac{n+1}{4}
\end{aligned}$$

P2. Sean X, Y v.a. independientes tal que $X\sim U(0,1), Y\sim U(0,1)$

a) Usando TCV determine la densidad de $H\left(X,Y\right)=X\cdot Y$
Solución:
Introducimos la v.a. auxiliar $W=\frac{1}{Y}\in(1,\infty)$, luego tenemos $X=Z\cdot W$, $Y=1/W$ y en virtud del TCV se tiene

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z,w) &= f_{X,Y}(zw,\frac{1}{w})|J| \qquad & 0<zw<1,\, 1<w<\infty \\
&= f_X(zw)f_Y(1/w)|J| \qquad & 1<w<1/z
\end{aligned}$$

Donde

$$
\begin{aligned}
|J| &= |\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial zw}{\partial z} & \dfrac{\partial zw}{\partial w} \\ \dfrac{\partial 1/w}{\partial z} & \dfrac{\partial 1/w}{\partial w} \end{pmatrix}| \\
&= |\det \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & -\frac{1}{w^2} \end{pmatrix}| \\
&= \frac{1}{w}
\end{aligned}
$$

finalmente para obtener f_Z integramos $f_{Z,W}$ sobre todo el dominio de W

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int\limits_1^{1/z} f_{Z,W}(z,w)dw \qquad z \in (0,1) \\
&= \int\limits_1^{1/z} \frac{1}{w} dw \\
&= \ln(w)|_{w=1}^{w=1/z} \\
&= \ln\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}
$$

b) Determine la densidad de $H(X) = -\ln(X)$
Solución: Como ln es una función inyectiva, podemos utilizar TCV en una dimensión, por lo que

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(z))|} f_X(\varphi^{-1}(z)) \\
&= \exp(-z) \cdot 1 \qquad z \in (0,\infty)
\end{aligned}
$$

Luego $Z = H(X) \sim \exp(1)$

c) Plantee las integrales para calcular

$$\mathbb{P}(X + Y < 1{,}5 | X \cdot Y > 0{,}5)$$

Solución:

$$\mathbb{P}(X + Y < 1,5 | XY > 0,5) = \frac{\mathbb{P}(X + Y < 1,5 \cap XY > 0,5)}{\mathbb{P}(XY > 0,5)}$$

Donde

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY > 0,5) &= \mathbb{P}(X > \frac{0,5}{Y}) \\
&= \int\limits_{0{,}5}^{1} \int\limits_{(0{,}5)/y}^{1} f_X(x) f_Y(y) dxdy \\
&= \int\limits_{0{,}5}^{1} \int\limits_{(0{,}5)/y}^{1} dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y<1,5\cap XY>0,5) &= \mathbb{P}(\{X<1{,}5-Y\}\cap\{X>0{,}5/Y\})\\
&= \mathbb{P}(0{,}5/Y<X<1{,}5-Y)\\
&= \int_0^{0,5}\int_{0,5/y}^{1,5-y} f_X(x)f_Y(y)dxdy\\
&= \int_0^{0,5}\int_{0,5/y}^{1,5-y} dxdy
\end{aligned}
$$

d) Si V es una v.a. tal que $V|X=x\sim Bin(n,x)$, calcule $E(V)$ y entregue una formula para calcular $\mathbb{P}(V=k)$ $\forall k\in R_V$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(V|X))\\
&= \mathbb{E}(nX)\\
&= n\mathbb{E}(X)\\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(V=k) &= \int_{(0,1)} \mathbb{P}(V=k|X=x)f_X(x)dx\\
&= \int_{(0,1)} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f_X(x)dx\\
&= \int_{(0,1)} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}dx
\end{aligned}
$$

P3. *a*) Sea X v.a. con $\mathbb{E}(X)=\mu$, $\mathbb{V}(X)=\sigma^2$

1) Sea $Y=H(X)$. Muestre que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &\approx H(\mu)+\frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2\\
\mathbb{V}(Y) &\approx (H'(\mu))^2\sigma^2
\end{aligned}
$$

Indicación: Desarrolle H en serie de Taylor (segundo orden para $\mathbb{E}(Y)$ primer orden para $\mathbb{V}(Y)$). Suponga que H cumple todas las condiciones necesarias.

Solución: Siguiendo la indicación, realizamos la expansión en torno a μ

$$
H(X)=H(\mu)+H'(\mu)(X-\mu)+\frac{1}{2}H''(\mu)(X-\mu)^2+o((X-\mu)^3)
$$

Aplicando esperanza a lo anterior

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(H(X)) &\approx \mathbb{E}(H(\mu))+\mathbb{E}(H'(\mu)(X-\mu))+\mathbb{E}(\frac{1}{2}H''(\mu)(X-\mu)^2)\\
&\approx H(\mu)+H'(\mu)\underbrace{(\mathbb{E}(X)-\mu)}_{=0}+\frac{1}{2}H''(\mu)\mathbb{E}((X-\mu)^2)\\
&\approx H(\mu)+\frac{1}{2}H''(\mu)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Ahora realizando aplicando varianza para la expansión de orden uno, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(H(X)) &\approx \mathbb{V}(H'(\mu) + H'(\mu)(X-\mu)) \\
&\approx \mathbb{V}(H'(\mu)) + \mathbb{V}(H'(\mu)(X-\mu))) \\
&\approx 0 + H'(\mu)^2\mathbb{V}(X-\mu) \\
&\approx H'(\mu)^2\sigma^2
\end{aligned}$$

2) Si $X \sim Geometrica(p)$ $Y = H(X) = X^{-1}$ use lo anterior para aproximar $\mathbb{E}(Y)$ ¿Para que valores de p seria mejor la aproximación?
Teniendo la aproximación anterior

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &\approx \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{\mathbb{E}(X)^3}\sigma^2 \\
&\approx p + \frac{1}{2} \cdot 2p^3\frac{1-p}{p^2} \\
&\approx p + p(1-p)
\end{aligned}$$

b) Para una v.a. X se define el error cuadrático medio como

$$ECM = \mathbb{E}\left((X-c)^2\right)$$

Muestre que $ECM = (\mathbb{E}(X) - c)^2 + \mathbb{V}(X)$ Determine c tal que minimice ECM **Solución:**

$$\begin{aligned}
ECM &= \mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(X) - c^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(X) + c^2 + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X) - c)^2
\end{aligned}$$

luego, para obtener el minimo basta ver que $ECM \geq \mathbb{V}(X)$, y la igualdad se alcanza cuando $c = \mathbb{E}(X)$