Material Auxiliar, Preparativo Control 2

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martín Castillo & José Cereceda
5 de octubre de 2014

Problemas

P1. *[Control 2 02/2013]*

a) Sea $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ una sucesión de v.a. independientes tales que $X_i \sim Bin(1,p)\ \forall i$. Sea además $N \sim Poisson(\lambda)$ independiente de $X_i\ \forall i$.

(i) Calcule $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) \quad \forall\ k$.

Solución:
Primero debemos recordar que si $X \sim Bin(n_1,p)$ e $Y \sim Bin(n_2,p)$, entonces $X+Y \sim Bin(n_1+n_2,p)$. Luego, para un n fijo, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k \;\middle|\; N=n\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \;\middle|\; N=n\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \underbrace{\sum_{n\geq k} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}_{e^{\lambda(1-p)}} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}$$

i.e., $\sum_{i=1}^{N} X_i \sim Poisson(\lambda p)$.

(ii) Determine, sin usar la parte (i), $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i)$.

Solución:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_i) = \lambda p$$

b) Sea $U \sim U(0,1)$ y X una v.a. aleatoria tal que $X|(U=p) \sim Bin(n,p)$. Encuentre la función densidad de X.

Indicación: Puede serle útil la identidad $\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i} = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=n) &= \int_0^1 \mathbb{P}(X=n \mid U=p)\cdot f_U(p)dp \\
&= \int_0^1 \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}dp \\
&= \binom{n}{i}\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i}dp \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

P2. *[Control 2 02/2012]*

a) Sea $X \sim B(n,p)$, $Y \sim BN(r,p)$, con la interpretación habitual de X e Y. Complete, **JUSTIFICANDO**, la igualdad

$$\mathbb{P}(X < \underset{\uparrow}{\bigcirc}) = \mathbb{P}(Y \underset{\uparrow}{\bigcirc}\underset{\uparrow}{\bigcirc})$$

Solución:
La igualdad es:

$$\mathbb{P}(X<r) = \mathbb{P}(Y>n)$$

El lado izquierdo representa la probabilidad de que en n intentos, haya menos de r éxitos. El lado derecho refleja una manera equivalente de ver este suceso: indica la probabilidad de que el r-ésimo éxito suceda después del n-ésimo intento. Es decir, si en n repeticiones, se obtienen menos de r éxitos, el r-ésimo éxito, sucede de manera posterior al n-ésimo intento, y viceversa.

b) Sea $X \sim$ Geometrica(p). Pruebe que $\mathbb{E}(X^{-1}) = -\dfrac{p\log p}{1-p}$.

Indicación: Recuerde que $\dfrac{a^i}{i} = \displaystyle\int_0^a x^{i-1}\,dx$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{-1}) &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k\geq 1}\frac{(1-p)^k}{k} = \frac{p}{1-p}\sum_{k\geq 1}\int_0^{1-p} x^{k-1}dx \\
&= \frac{p}{1-p}\int_0^{1-p}\sum_{k\geq 1} x^{k-1}dx = \frac{p}{1-p}\int_0^{1-p}\sum_{k\geq 0} x^k dx \\
&= \frac{p}{1-p}\int_0^{1-p}\frac{1}{1-x}dx = \frac{p}{1-p}[-ln(1-x)]_0^{1-p} \\
&= -\frac{p\log(p)}{1-p}
\end{aligned}$$

c) Sea X v.a. discreta con $R_X \subseteq \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades de X como $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$, es decir,

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

(i) Determine $\left.\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right|_{z=0}$ $n = 0, 1, 2, ...$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n G_X(z)}{dz^n} &= \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} z^k \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \frac{d^n}{dz^n} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) k(k-1)...(k-n+1) z^{k-n} \quad n \leq k, \ 0 \text{ en otro caso} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) k(k-1)...(k-n+1) z^{k-n} \\
&= \mathbb{P}(X = n) n! + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) k(k-1)...(k-n+1) z^{k-n}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right|_{z=0} = \mathbb{P}(X = n) n!$$

(ii) Calcule $G_X(z)$ si $X \sim Poisson(\lambda)$.

Solución:

Sea $X \sim Poisson(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda z} \\
&= e^{-\lambda(1-z)}
\end{aligned}$$

P3. Considere el paseo aleatoria en dos dimensiones, es decir un jugador se ubica en el origen de la recta y da un paso al lado derecho con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $(1-p)$. Calcule el lugar esperado donde se encontrara el jugador luego de N pasos.

Solución:

Definamos las v.a. X_i que corresponde al sentido $(+1, -1)$ dado en el paso i, es decir la v.a. es tal que

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{Con probabilidad } p \\ -1 & \text{Con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

luego, la posición X del jugador luego de n pasos, corresponde a la realización de n veces la v.a. X_i por lo que podemos escribir $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para finalizar, el lugar esperado del jugador corresponde a $\mathbb{E}(X)$ y en virtud de la linealidad de la esperanza se tiene que.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p - (1-p) \\ &= 2np - n \end{aligned}$$